

## LABORATOR 9

### CALCULUL FIABILITĂȚII FINALE A REȚELELOR STOHAȘTICE CU AJUTORUL DIAGRAMELOR DE DECIZIE BINARĂ.

Rezumat.

În această lucrare se propune un algoritm bazat pe Diagrama de Decizie Binară(BDD) pentru calculul fiabilității finale. Aceasta este definită ca fiind probabilitatea ca nodurile din rețea să comunice reciproc, luând în calcul și eventualele disfuncționalități ale legăturilor din rețea. Eficacitatea acestei abordări este demonstrată prin efectuarea de experimente în mai multe rețele mari reprezentate prin grafice stocastice.

#### 1.Introducere

O rețea stohastică este modelată de un grafic unidirecționat  $G = (V, E)$ , unde  $V$  este setul de noduri iar  $E$  este setul de muchii. Locurile corespund nodurilor, iar legăturile corespund muchiilor. Fiabilitatea finală  $R(G)$  este probabilitatea ca  $G$  să rămână conectat, considerând nodurile perfecte și muchiile defectabile în mod independent, cu o probabilitate cunoscută. Provan [Provan, 1986] a arătat că, până și în cazul graficelor plane, această problemă este una de tipul NP-hard. În literatura de specialitate, se pot distinge două clase de algoritmi de calcul a fiabilității rețelei. Prima clasă se ocupă de enumerarea tuturor căilor minime. Datorită faptului că această enumerare oferă evenimente nedisjunctive, au fost folosite metode ca *incluzia-excluzia* sau *suma produselor disjuncte*. Algoritmii din a doua clasă sunt algoritmi de coeficienți, îmbunătățiți prin reduceri. Acesta constă în reducerea dimensiunii rețelei păstrând în același timp fiabilitatea acesteia. Atunci când nu este permisă nici o reducere, se face apel la metoda algoritmilor de coeficienți. Principiul are la bază alegerea unei componente și descompunerea problemei în două sub-probleme: prima presupune defectarea componentei, a doua presupune că aceasta funcționează. Satyanarayana și Chang [Satyanarayana și Chang, 1983] și Wood [Wood, 1985] au arătat că în rezolvarea acestei probleme, algoritmii de coeficienți sunt mult mai eficienți decât metoda clasică sau metoda enumerării în rezolvarea acestei probleme. Aceasta a fost confirmată de lucrările experimentale ale lui Theologou și Carlier [Theologou și Carlier, 1991].

#### 2. Diagrama de decizie binară (BDD)

Akers [Akers, 1978], a folosit pentru prima dată BDD pentru reprezentarea funcției booleane. Bryant a popularizat utilizarea BDD prin introducerea unui set de algoritmi pentru construcția și manipularea eficientă a structurii BDD [Bryant, 1992]. În zilele noastre, BDD sunt folosite într-o gamă largă de domenii, inclusiv în sinteza și verificarea hardware, verificarea modelelor și validarea de protocol. Utilizarea acestora în

cadrul analizei de fiabilitate a fost introdusă de către Madre și Coudert [Coudert și Madre, 1992b] [Coudert și Madre, 1992a] și dezvoltate de Rauzy [Rauzy, 1993]. Sekine și Imai au fost primii care au folosit structura BDD în fiabilitatea rețelelor [Sekine și Imai, 1998]. O BDD este un grafic aciclic direcționat (DAG), bazat pe descompunerea lui Shannon. Descompunerea lui Shannon este definită după cum urmează:

$$f = xf_{x=1} + \bar{x}f_{x=0}$$

unde  $x$  este una din variabilele de decizie iar  $f_{x=1}$  este funcția booleană  $f$  evaluată la  $x=1$

Graficul are două noduri terminale etichetate cu 0 și 1, reprezentând cele două expresii constante corespunzătoare. Fiecare nod interior este etichetat cu o variabilă booleană  $x$  și are muchii exterioare numite muchia 1 și muchia 2. Nodul legat de către muchia 1 reprezintă expresia booleană atunci când  $x = 1$ , de ex.  $f_{x=1}$  în timp ce nodul legat de către muchia 0 reprezintă expresia booleană atunci când

$x = 0$ , de ex.  $f_{x=0}$

O diagramă de decizie binară ordonată (OBDD) este o BDD în care variabilele sunt ordonate după un model perfect cunoscut, iar toate variabilele căilor de vizitare se află într-o ordine ascendentă. Ulterior, BDD-urile vor fi considerate ca fiind ordonate. Alura BDD-ului dă valoarea lui  $f$ , valoare care este necesară atribuirii unui traseu de la origine la extremități. Dimensiunea unei structuri BDD depinde critic de ordonarea variabilelor. Etapele de cercetare și ordonare care minimizează dimensiunile unei BDD constituie de asemenea o problema NP-completă [Friedman și Supowit, 1990].

### 3. Calculul fiabilității finale

Un grafic  $G$  este conectat dacă există cel puțin un traseu între oricare două noduri. Modelul nostru de rețea este un grafic scolastic unidirecționat  $G = V, E$ .

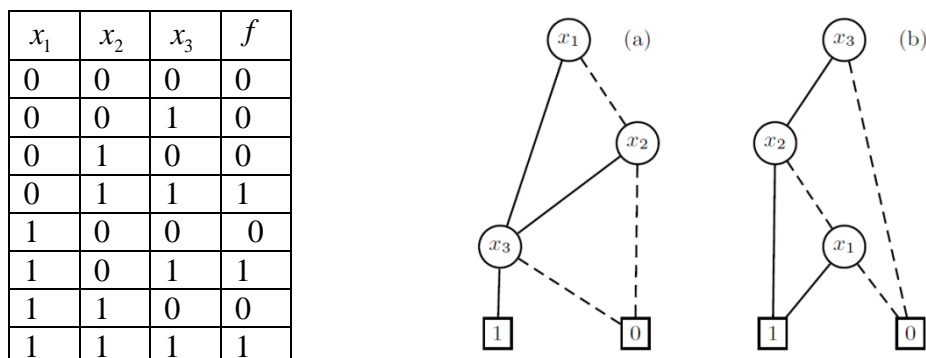


Fig.1 Funcția  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)$  reprezentată de propriul tabel de adevăr și BDD-uri organizate în: a)  $x_1 < x_2 < x_3$  și b)  $x_3 < x_2 < x_1$ . Linia punctată și cea continuă reprezintă valoarea "0" respectiv "1".

Fiecare muchie  $e_i$  a lui  $E$  ( $i \in 1, 2, \dots, m$  unde  $m = |E|$ ) se poate defecta independent cu o probabilitate cunoscută  $q_i$  ( $p_i = 1 - q_i$  este probabilitatea de funcționare a lui  $e_i$ ) și se consideră că nodurile lui  $G$  sunt perfect fiabile. O stare  $\Gamma$  a graficului scolastic  $G$  este determinată de  $x_1, x_2, \dots, x_m$  unde  $x_i$  reprezintă starea muchiei  $e_i$ , de ex.  $x_i = 0$  când muchia  $e_i$  se defectează și  $x_i = 1$  când aceasta funcționează. Probabilitatea asociată lui  $\Gamma$  este definită ca:

$$\Pr \Gamma = \prod_{i=1}^m x_i p_i + (1 - x_i) q_i$$

În fiecare stare  $\Gamma$ , este asociat un grafic parțial  $G_\Gamma = (V, E')$  astfel încât  $e_i \in E'$  dacă și numai dacă  $e_i \in E$  și  $x_i = 1$ . Fiabilitatea finală poate fi definită precum urmează:

$$R(G) = \sum_{G_\Gamma \text{ este conectat}} \Pr \Gamma$$

Vom nota cu  $G_{*e}$  graficul  $G$  cu muchia  $e$  contractată și cu  $G_{-e}$  graficul  $G$  cu muchia  $e$  ștersă.

#### 4. Construcția funcției fiabilității finale.

Algoritmul nostru urmărește 3 etape:

1. Muchiile sunt ordonate folosind o euristică.
2. Pentru codificarea fiabilității rețelei este generată o BDD.
3. Cu ajutorul acestei BDD, vom obține fiabilitatea finală.

Vom aplica recursiv algoritmul cu coeficienți în ordinea  $e_1, e_2, \dots, e_m$   $E_1, E_2, \dots$ , în mod descrescător. Procesul de calcul poate fi reprezentat ca fiind un arbore binar astfel încât rădăcina să corespundă graficului original  $G$  și ramificațiile să corespundă graficelor obținute prin ștergerea/contractarea muchiilor. Nodurile arborelui binar corespund subgraficelor lui  $G$ . Pentru reprezentarea compartimentată (partiționată) a graficului, folosim o metodă introdusă de Carlier [Carlier și Lucet, 1996]. Această metodă, pe lângă eficiența sporită în reprezentarea graficelor, permite și determinarea graficelor izomorfe în decursul procesului de calcul. Prin partajarea graficelor izomorfe, un arbore de expansiune este transformat într-un grafic aciclic de bază (prin urmare, o BDD).

## 5. Partajarea graficelor izomorfe

Vom considera  $E_k = e_1, e_2, \dots, e_k$  și  $\bar{E}_k = e_{k+1}, \dots, e_m$ . Graficele de nivel  $k$  ale BDD sunt subgrafice ale lui  $G$  compuse cu set-ul de muchii  $\bar{E}_k$ . Pentru fiecare nivel, definim set-ul marginal  $F_k$  ca fiind un set de noduri, astfel încât fiecare nod al lui  $F_k$  să fie incident cel puțin unei muchii din  $E_k$  și unei muchii din  $\bar{E}_k$ . Apoi ordonăm noduri în blocuri, conform regulii de mai jos: două noduri  $s$  și  $t$  din  $F_k$  se află în același bloc dacă și numai dacă există un traseu constituit din muchii funcționale care leagă  $s$  de  $t$ .

De exemplu, în figura 3 (a), în primul nivel, setul marginal este egal cu  $a, b$ .  $G_{*e_1}$  poate fi reprezentat de partiția  $[ab]$  iar  $G_{-e_1}$  de partiția  $[a] [b]$ . În acest moment vom ordona partajările în cadrul aceluiasi nivel  $k$  cu scopul identificării și stocării lor într-un mod eficient. Vom numerota partițiile de la 1 la  $Bell |F_k|$ , unde  $Bell |F_k|$  (cunoscut ca numărul lui Bell) este numărul teoretic maxim de partiții din cadrul nivelului  $k$ . Acest număr crește exponențial cu  $i$ , prin urmare, numărul de clase crește exponențial cu dimensiunea setului marginal. Din acest moment în cadrul procesului de calcul al fiabilității finale, în locul graficelor complete, putem manipula doar partițiile acestora.

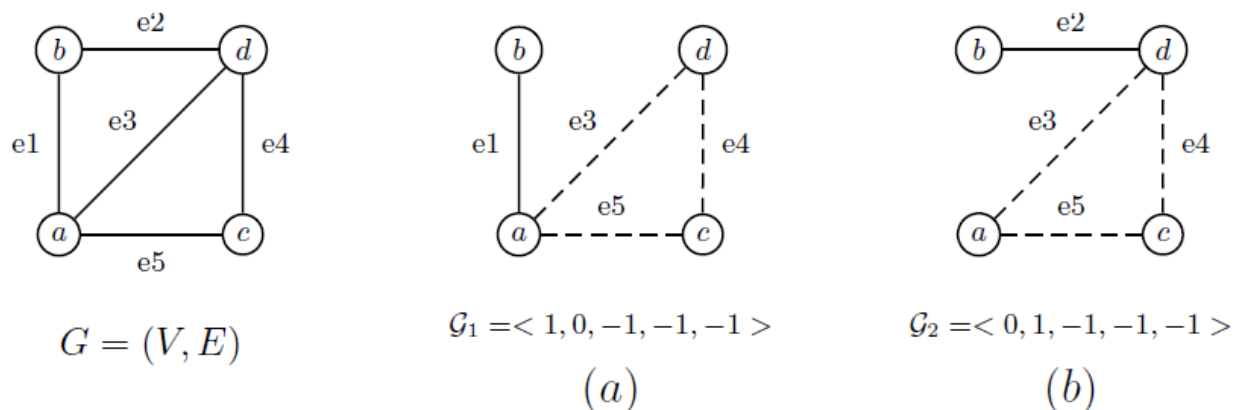


Fig. 2.  $G \Gamma_1$  și  $G \Gamma_1$  reprezintă subgrafice ale nivelului 2 din procesul de calcul ilustrat în figura 3(a).  $G \Gamma_1$  și  $G \Gamma_1$  au aceeași partiție:  $a \ d$ .  $e_i = -1$  indică faptul că starea lui  $e_i$  nu este încă stabilită.

## 6. Calculul fiabilității finale.

În capitolul precedent, a fost dezvoltată BDD a funcției fiabilității finale. BDD poate fi cunoscută ca un set de produse disjuncte bazate pe grafice. Pornind de la proprietatea de disjuncție a acestei structuri, putem ușor calcula fiabilitatea finală a lui  $G$ . Considerând probabilitatea de nedefectare  $p_k$   $k \in 1, 2, \dots, m$  a muchiei  $e_k$ , fiabilitatea finală a BDD determinată de funcția  $f$  poate fi recursiv obținută prin:

$$R\ G = \Pr\ f = 1 = \Pr\ x_k \cdot f_{x_k=1} = 1 + \Pr\ \bar{x}_k \cdot f_{x_k=0} = 1 \quad (\text{proprietatea de disjunctivitate})$$

$$R\ G = \Pr\ f = 1 = p_k \cdot \Pr\ f_{x_k=1} = 1 + q_k \cdot \Pr\ f_{x_k=0} = 1 \quad (\text{proprietatea de independență})$$

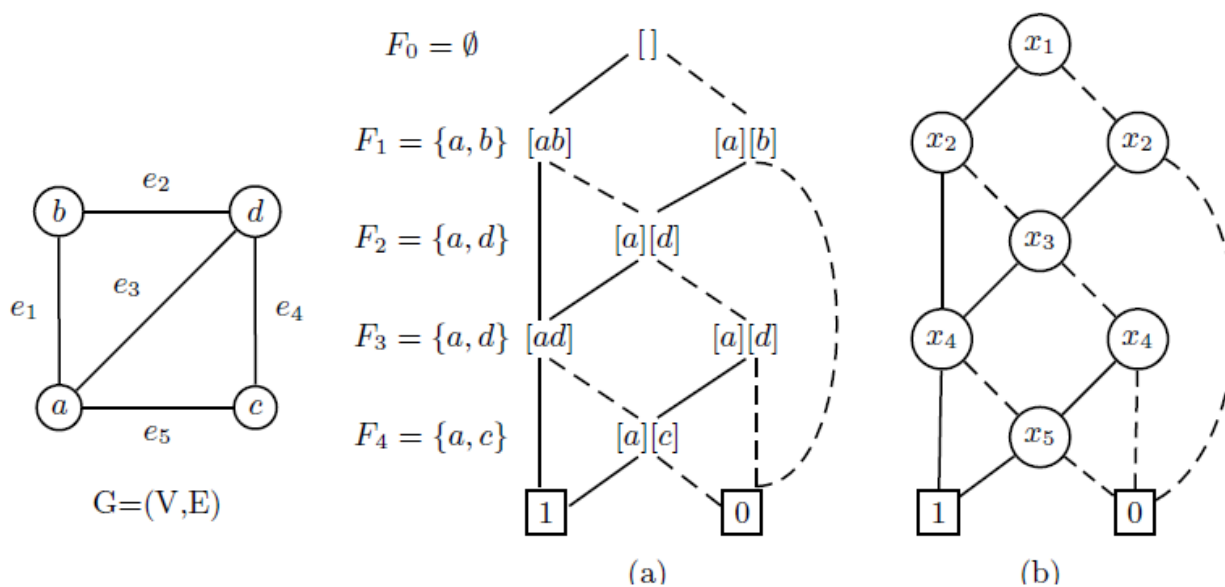


Fig. 3. Graficul  $G$  și BDD aferentă (b). Linia punctată reprezintă valoarea 0, iar cea continuă, valoarea 1. (a) prezintă procesul de calcul al BDD.

Fiabilitatea este evaluată parcurgând BDD de la origine către extremități.