

MECANICA RUPERII

LABORATOR 5

CALCULUL INTEGRALEI J PE BAZA ANALIZEI CU ELEMENTE FINITE

-
- 1. Introducere
 - 2. Modelare
 - 3. Rezultate obținute
 - 4. Prelucrarea datelor
-

1. Introducere

Integrala J, introdusă de Rice în 1968, ne oferă o măsură a intensității **deformației elasto-plastice** în apropierea vârfului fisurii și reprezintă un mijloc de a caracteriza rezistența la fisurare a materialului. În cadrul acestei lucrări, folosind analiza cu elemente finite, se va calcula valoarea integralei J pentru un material dat și se va determina variația acesteia funcție de mărimea semilungimii fisurii.

Pentru definirea integralei J se pornește de la ecuația bilanțului energetic ce se stabilește în momentul propagării unei fisuri, deci a formării de noi suprafețe:

$$W = W_0 + \Delta W_e + \Delta W_\gamma - L \quad (1)$$

în care:

W_0 este energia de deformație elastică disponibilă atunci când fisura nu se propagă în timp ($a = \text{const}$);

ΔW_e este variația energiei de deformație elastică ca urmare a extensiei fisurii;

ΔW_γ este variația energiei superficiale ca urmare a formării noilor suprafețe ale fisurii în extensie;

L este lucrul mecanic al forțelor exterioare.

Relația de mai sus este valabilă atât în condițiile unor stări liniar - elastice cât și pentru o stare plastică sau neliniar - elastică, restricția de care trebuie să se țină seama în acest caz constă în aceea că, la solicitări în domeniul plastic deformațiile sunt ireversibile.

Instabilitatea în propagarea unei fisuri care străbate o grosime egală cu unitatea se produc atunci când este satisfăcută condiția:

$$\frac{d}{da} \left(-\Delta W_e \right) \geq \frac{d}{da} \left(\Delta W_\gamma \right) \quad (2)$$

Integrala J reprezintă prin definiție energia disponibilă pe unitatea de suprafață a fisurii în extensie. În acest caz:

$$J = \frac{d}{da} \left(-\Delta W_e \right) \quad (3)$$

sau:

$$J = \frac{dW_p}{da} \quad (4)$$

în care $W_p = W_0 + \Delta W_e - L$ este energia potențială a sistemului.

Considerăm o placă având grosimea egală cu unitatea, solicitată elastic după modurile I și II. Această placă conține o fisură centrală de lungime $2a$ la vârful căreia se consideră un contur închis Γ , *figura 1*.

După efectuarea unor transformări simple și după efectuarea calculelor integrala J devine:

$$J = \int_{\Gamma} W dz - \int_{\Gamma} \frac{\partial U_i}{\partial x} ds \quad (7)$$

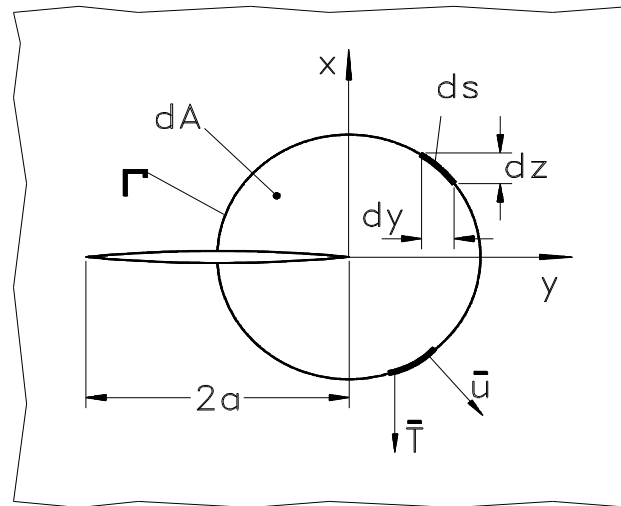


Fig. 1. Definirea integralei J

Se poate demonstra că valoarea acestei integrale *nu depinde* de conturul parcurs de la un flanc la celălalt al fisurii. Această din urmă observație ne va permite să alegem pentru analiza cu elemente finite un *contur convenabil* pentru a avea cât mai puține variabile de determinat.

2. Modelare

Soluția prezentată în această lucrare se referă la un model bidimensional ca cel din *figura*

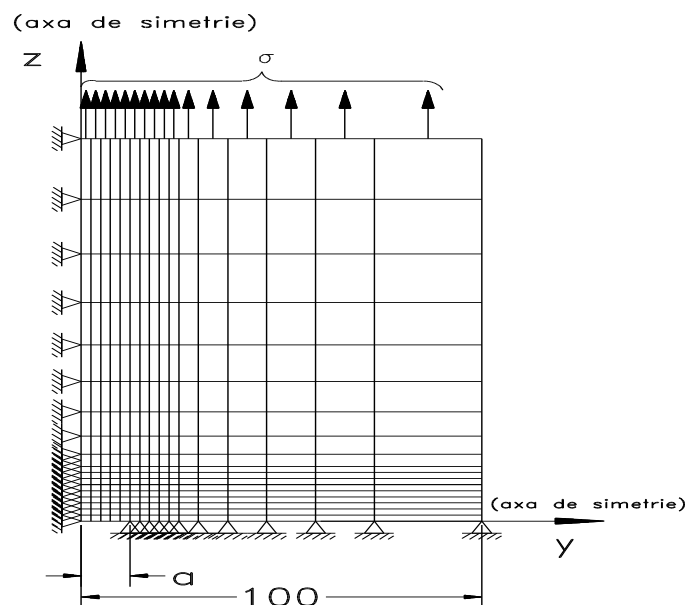


Fig. 2. Rețeaua de discretizare

Acest model este format din elemente patrulatere bidimensionale cu patru noduri. Datorită simetriei geometrice și simetriei de încărcare se analizează numai un sfert din placă ce conține o fisură centrală străpunsă. Pentru păstrarea deplasărilor modelului inițial se împiedică deplasările după axa z pentru toate nodurile rețelei aflate pe axa de simetrie y și deplasările după axa y pentru toate nodurile rețelei aflate pe axa de simetrie z . Fisura a fost modelată lăsând deplasarea liberă pentru toate nodurile de pe axa z care au ordonata $z=0$ și abscisa $y < 20$ mm.

Considerând materialul omogen și izotrop, analiza cu elemente finite se bazează pe schematizarea curbei caracteristice prin două segmente de dreaptă (figura 3) și anume: segmentul OA înclinat față de O ϵ cu unghiul α ($\tan \alpha = E$ - modulul de elasticitate longitudinal al materialului) și segmentul AB înclinat cu unghiul β ($\tan \beta = E_p$ - modulul de plasticitate).

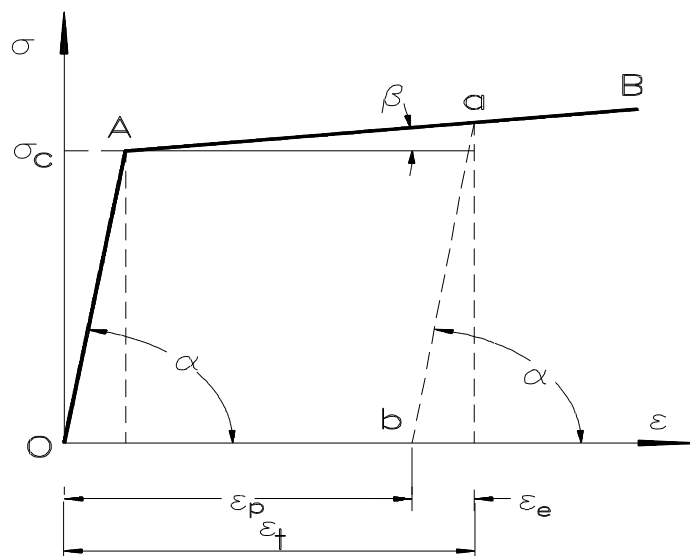


Fig. 3. Schematizarea curbei caracteristice

O diagramă de acest fel este denumită cuba caracteristică cu întărire; ea are la bază ipoteza întăririi, adică se presupune că, și după depășirea limitei de curgere deformațiile cresc proporțional cu tensiunile (evident după o dreaptă cu pantă diferită).

Datele ce caracterizează materialul folosit în cadrul analizei cu elemente finite sunt: $E=21 \cdot 10^4$ MPa, $\nu=0,3$, $E_p = 0,7 \cdot 10^4$ MPa și $\sigma_c = 250$ MPa.

Pentru ca indicațiile relative la tensiunile și deformațiile stabilite în fiecare nod al rețelei de discretizare să fie cât mai corecte trebuie să se țină seama de faptul că atunci când avem de-a face cu o comportare plastică de ansamblu a probei, anumite zone au deformații ireversibile. De aceea analiza cu elemente finite se va efectua în două etape.

Într-o primă etapă se vor reține toate nodurile în care se depășește limita de curgere σ_c .

Se trece apoi la pasul al doilea al analizei când deplasările plastice ale diferitelor noduri se impun de la început. Se va obține o nouă stare de tensiuni în jurul fisurii care ține seama de deformațiile remanente suferite ca urmare a plasticității materialului.

Așa cum s-a afirmat, valoarea integralei J nu depinde de forma curbei Γ din jurul fisurii. Astfel, ne vom alege pentru aceasta traseul din figura 4.

Curba Γ aleasă cuprinde un număr j de puncte pe orizontală (BC) și un număr i de puncte pe verticală (AB + CD). Acestea se află între ele la distanța $\Delta z = \Delta y = 2$ mm.

Având în vedere discretizarea, relația pentru integrala J va fi:

$$J = 2 \left[\frac{dz}{E} \sum_i \left(\sigma_{yi}^2 - \nu \sigma_{yi} \sigma_{zi} \right) + \sum_j \left(\frac{dy}{E} \sigma_{yj}^2 + \frac{dy}{G} \tau_{zj}^2 \right) \right]$$

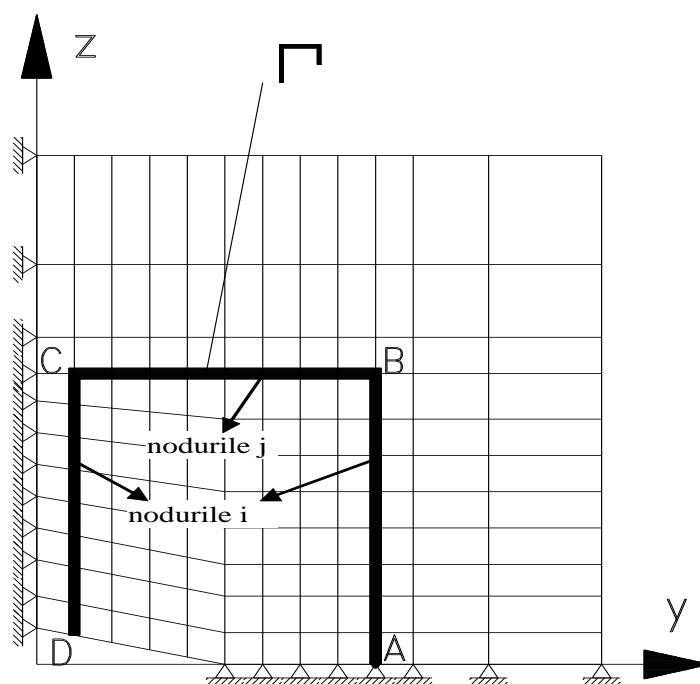


Fig. 4. Curba Γ din jurul fisurii

Astfel, pentru fiecare nod în parte va trebui să reținem tensiunile σ_y , σ_z și τ_{yz} . Coeficientul 2 provine din simetria curbei Γ față de axa y .

3. Rezultate obținute

Analiza neliniară efectuată asupra rețelei inițiale conduce la o anumită stare de tensiuni. Tensiunile maxime din imediata vecinătate a vârfului fisurii se pot observa în figura 5.

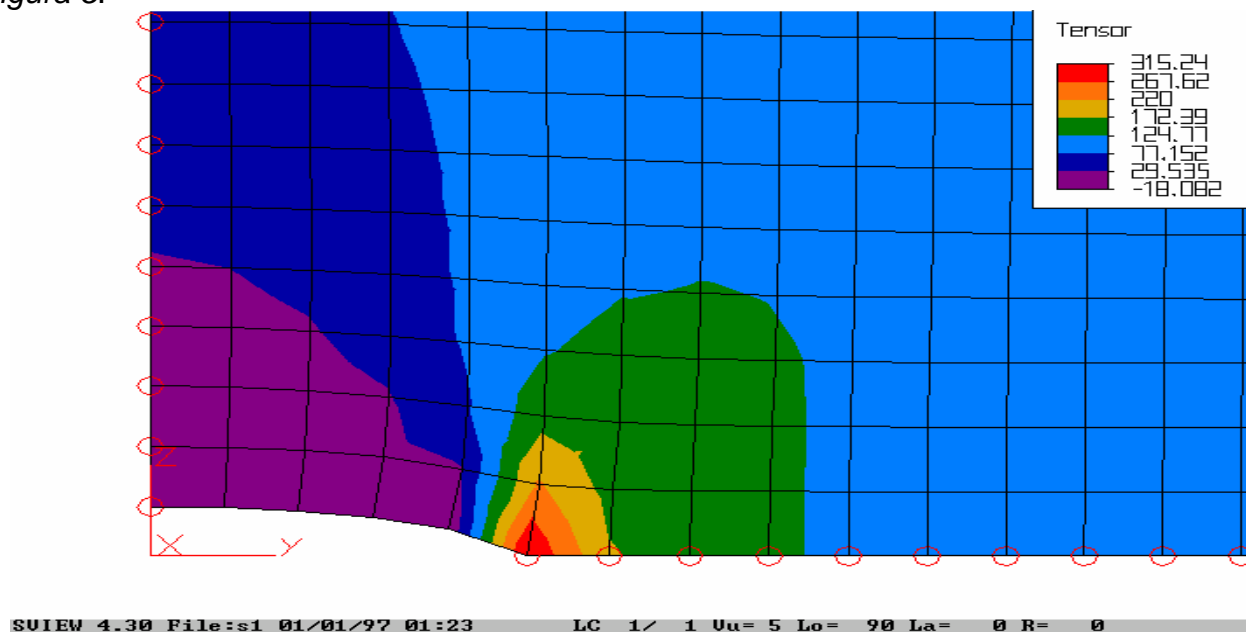


Fig. 5. Reprezentarea tensiunilor maxime, σ_{zz}

Pentru fiecare punct de pe curba Γ se vor reține, într-un tabel de forma 1, tensiunile σ_{yk} , σ_{zk} și τ_{yzk} .

Tabelul 1

Nr. crt.	Nr. nod	σ_{yk}	σ_{zk}	τ_{zk}	$2 \left[\frac{dz}{E} \sum_i \sigma_{yi}^2 - \mu \sigma_{yi} \sigma_{zi} \right] \sum_j \left(\frac{dy}{E} \sigma_{yj}^2 + \frac{dy}{G} \tau_{zj}^2 \right)$
					$J = 2 \left[\frac{dz}{E} \sum_i \sigma_{yi}^2 - \mu \sigma_{yi} \sigma_{zi} \right] \sum_j \left(\frac{dy}{E} \sigma_{yj}^2 + \frac{dy}{G} \tau_{zj}^2 \right)$

Pentru calculul integralei J se folosesc tabele de forma *tabelului 2* ce conține relații de calcul predefinite.

Tabelul 2

nod	Nr. crt	σ_{2y}	σ_{2z}	τ_{2yz}	σ_{2yi}^2	σ_{2yi}^2	$\sigma_{2yi} * \sigma_{2zi}$	τ_{2yzi}^2
3	1	-113.90	-20.54	-69.44	12973.21		2339.506	
42	2	-26.47	8.78	-17.30	700.6609		-23 407	
83	3	10.88	18.74	-9.12	118.3744		203.8912	
124	4	16.94	3 86	-7.44	286.9636		556.6484	
163	5	14.40	50.35	0.04	207.36		725.04	
206	6	7.92	64.24	8.72	6 75808		508.9093	
245	7	1.04	74.35	16.85	1.0816	1.0816	77.324	283.9225
246	8	-6.60	90.02	15.84		43.61282		250.9056
247	9	-15.30	107.70	21.73		234.09		47 1929
248	10	-23.29	121.00	3 64		54 4241		1065.37
249	11	-29.11	12 40	43.03		847.3921		1851.581
250	12	-3 69	107.80	45.40		1068.636		2061.16
251	13	-37.11	79.16	33.11		1377.152		1096.272
252	14	-4 40	5 24	1 02		1797.76		144.4804
253	15	-44.78	43.20	-0.33		2005.248		0.10595
254	16	-44.31	43.87	- 48		1963.376		6.140484
255	17	-41.91	43.56	-4.53		1756.448		20.5209
256	18	-36.13	53.04	-4.39		1305.377		19.22823
257	19	-28.09	77.89	5.15		789.0481		26.5431
258	20	-2 41	104.10	20.74		50 2081		430.1476
259	21	-19.28	12 10	36.03		371.7184		1298.161
260	22	-16.17	131.80	49.23		261.4689		2423.593
261	23	-1 75	135.00	59.02		16 5625		3483.36
262	24	-9.19	134.30	65.37		84.52964		4273.237
263	25	-5.83	131.80	69.04		33.96558		4766.522
264	26	-3.02	128.60	70.71		9.090225		4999.904
265	27	-0.86	125.40	71.06		0.731025		5049.524
266	28	0.69	12 30	70.56		0.469225		4978.714
267	29	1.70	119.60	69.57	893401	893401	203.4396	4839.985
228	30	5.54	119.20	71.67	30.6916		660.368	
185	31	9.62	118.50	73.02	9 58288		1140.207	
146	32	13.55	117.60	73.38	183.6025		1593.48	
107	33	16.85	116.90	7 62	283.9225		1969.765	
66	34	19.05	116.30	70.75	36 9025		2215.515	
25	35	19.83	116.10	69.75	393.2289		230 263	
					15700.23	15161.28	14263.95	43841.57
					17.81065			176.0981
					J=	193.9088		

În matricea de bază a materialului se introduce o particulă de incluziune pentru a studia variația integralei J la deplasarea acestei particule în raport cu vârful fisurii. Pentru a simula prezența unei particule de incluziune, confecționată din material cu proprietăți diferite de cele ale materialului de bază, în imediata vecinătate a fisurii s-a introdus o particulă cu următoarele proprietăți de material, *figura 6*:

- pentru materialul de bază: $E=2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ și $\nu=0,3$;
- pentru particula de incluziune: $E=2,4 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ și $\nu=0,25$.

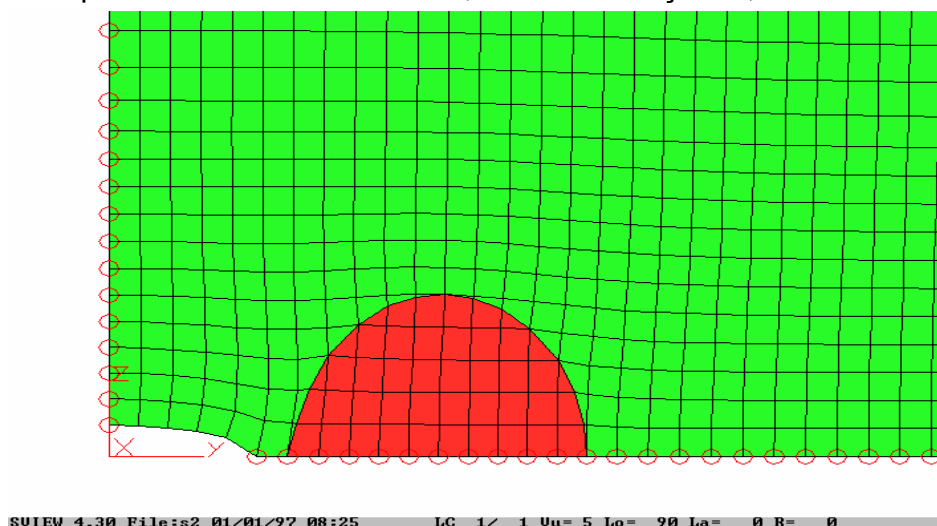


Fig. 6. Particula de incluziune

Tensiunile în imediata vecinătate a fisurii se modifică în raport cu cazul inițial, *figura 7*.

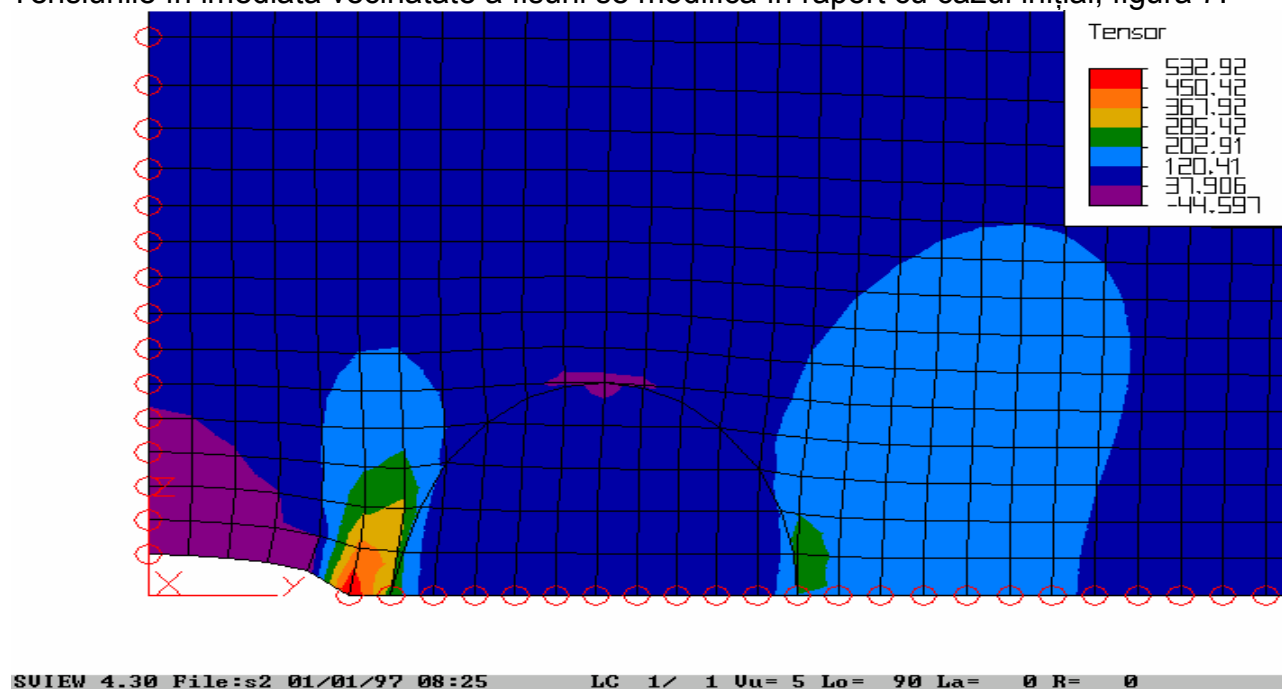


Fig. 7. Harta tensiunilor în prezența particulei de incluziune

Tensiunile σ_y , σ_z și τ_{yz} se trec într-un tabel de forma *tabelului 2* ce conține relațiile de calcul prestabilite pentru calculul integralei J. *Tabelul 2* conține cazul particulei din *figura 7*.

Aceeași particulă se modelează (deplasează) în poziții diferite de-a lungul axei y, în pozițiile notate cu s2, s3 ÷ s9. În *figura 8* este reprezentată harta tensiunilor atunci când particula de incluziune este plasată cu partea frontală în poziția ultimă s9.

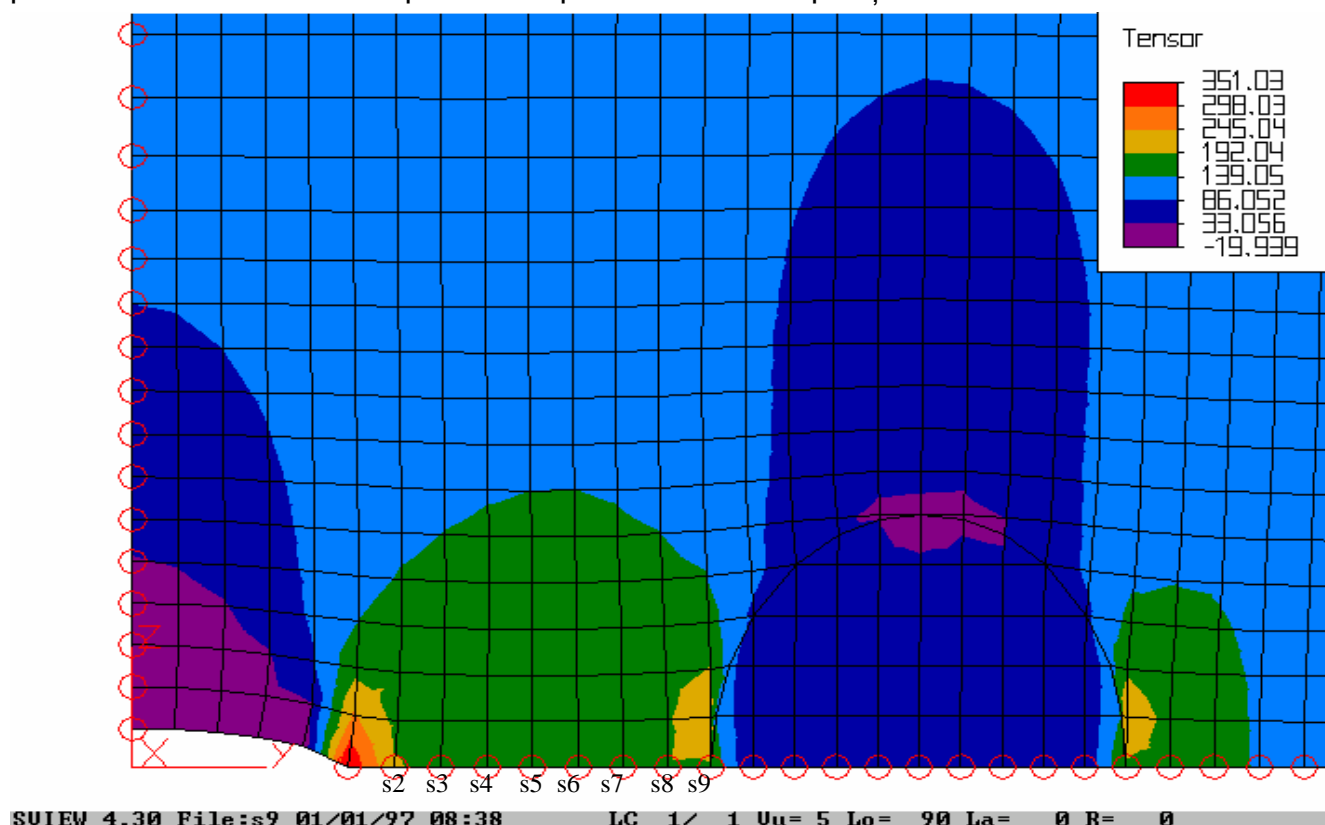


Fig. 8. Particulă de incluziune dură deplasată de vârful fisurii

Pentru fiecare deplasare a particulei de incluziune în pozițiile s2÷s9, tensiunile σ_y , σ_z și τ_{yz} se trec într-un tabel de forma *tabelului 2* din care rezultă automat pe baza relațiilor de calcul prestabilite, valoarea integralei J.

4. Prelucrarea datelor

În *tabelul 3* sunt date aceste valori pentru fiecare pas al deplasării particulei de incluziune.

Tabelul 3

Nr. crt.	Poziție particulă	Distanța față de frontul fisurii [mm]	Integrala J [N*mm]
0	Fără particulă	-	86,50
1	S2	2	193,91
2	S3	4	194,06
3	S4	6	197,68
4	S5	8	202,52
5	S6	10	228,16
6	S7	12	213,66
7	S8	14	219,88
8	S9	16	217,39

Curba de variație a integralei J funcție de deplasarea particulei de incluziune este prezentată în figura 9.

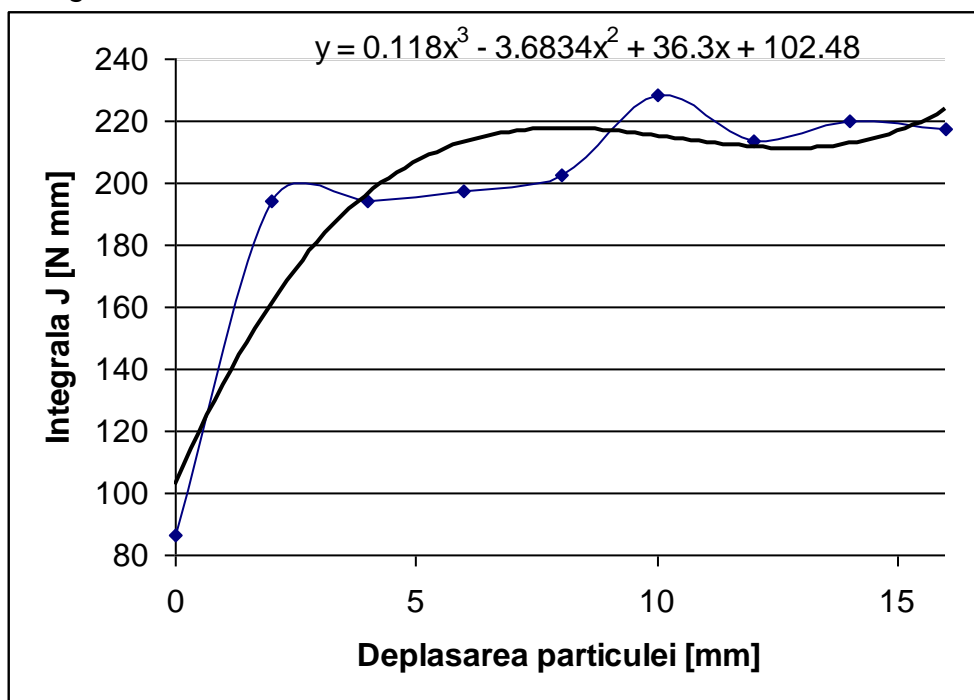


Fig. 9. Variația integralei J cu deplasarea particulei de incluziune