

CAPITOLUL 9

PROPAGAREA DEFECTELOR SUBCRITICE ȘI SIGURANȚA ÎN FUNCȚIONARE

9.1. Propagarea defectelor subcritice

9.2. Mecanisme de propagare lentă a fisurilor

9.3. Siguranța în funcționare: oboseala statică și dinamică, diagramele RPT, determinarea duratei de viață

Am considerat până acum că ruperea catastrofală a materialelor se produce atunci când tensiunea aplicată atinge o valoare critică, corespunzătoare unei mărimi critice a defectului, ca urmare K_I sau G_I ating valoarea critică K_{Ic} respectiv G_{Ic} . În cazul materialelor cu un comportament preponderent fragil, propagarea fisurii este practic instantanee, în condițiile în care viteza acesteia poate atinge 10^6 m/sec. Uneori, pentru tensiuni aplicate inferioare tensiunii critice ($K_{I0} < K_I < K_{Ic}$) fisura poate crește lent (cu viteze de la 1 la 10^{-6} m/sec.) iar ruperea brutală se produce când $K_I = Y\sigma\sqrt{\pi a}$ devine egal cu K_{Ic} . Acest fenomen poartă numele de *rupere întârziată* sau *oboseală statică* sau *degradarea rezistenței în timp* [69].

Degradarea rezistenței în timp are o foarte mare importanță pentru aplicațiile tehnologice și poate restrânge perspectivele de utilizare a materialelor. Din acest punct de vedere este necesară caracterizarea creșterii lente a fisurilor, responsabilă de respectiva degradare. Această caracteristică trebuie să permită prevederea duratei de viață a pieselor în serviciu și joacă un rol primordial asupra siguranței în funcționare. Cunoașterea mecanismelor ce controlează fenomenul de creștere lentă a fisurilor trebuie să permită o ameliorare a proprietăților sau o descoperire de materiale noi.

9.1. Propagarea defectelor subcritice

Degradarea în timp a rezistenței materialelor se datorează propagării fisurilor subcritice. Este importantă cunoașterea relației care există între viteza de propagare a fisurii și factorul de intensitate a tensiunii K_I . Pentru cele mai multe mecanisme de propagare a fisurii există o relație unică între viteza de propagare v și factorul de intensitate a tensiunilor K_I , pentru condiții de mediu și temperatură date. Viteza de propagare a fisurilor este independentă de geometria probei și de modul de încărcare. Această relație poate fi reprezentată schematic dacă se trasează variația ($\log v$) în funcție de ($\log K_I$), *figura 9.1* [69].

Se pot distinge patru domenii de creștere a fisurii pentru $K_I \leq K_{Ic}$, în funcție de materiale și condițiile de experimentare, domenii ce corespund unui anumit regim de creștere a fisurii. Atunci când factorul de intensitate a tensiunii atinge valoarea critică, propagarea devine catastrofală inducând ruperea bruscă a materialului.

- Pentru valori mici ale lui K_I , *domeniul I*, se observă în general că, sub valoarea K_{Ii} creșterea este nulă. Această valoare singulară poate fi determinată cu precizie destul de bună. Existența unei asemenea singularități permite definirea unui domeniu de lucru perfect sigur.
- *Domeniile II și III* se întâlnesc cel mai adesea la materialele cu comportament preponderent fragil. Variația vitezei de creștere a fisurii funcție de factorul de intensitate a tensiunii poate fi descrisă printr-o lege de forma:

$$v = Ak_I^n \quad (9.1)$$

cu A și n constante (pentru condiții experimentale date și pentru un material dat). În domeniul II avem $10 < n < 20$, iar în domeniul III, $n=0$. În zona II viteza de creștere este controlată prin reacția la vârful fisurii (mecanism extrinsec de tip coroziune sub tensiune), iar în zona III propagarea se produce la viteză constantă și este controlată de difuzia speciilor corozive în frontul fisurii.

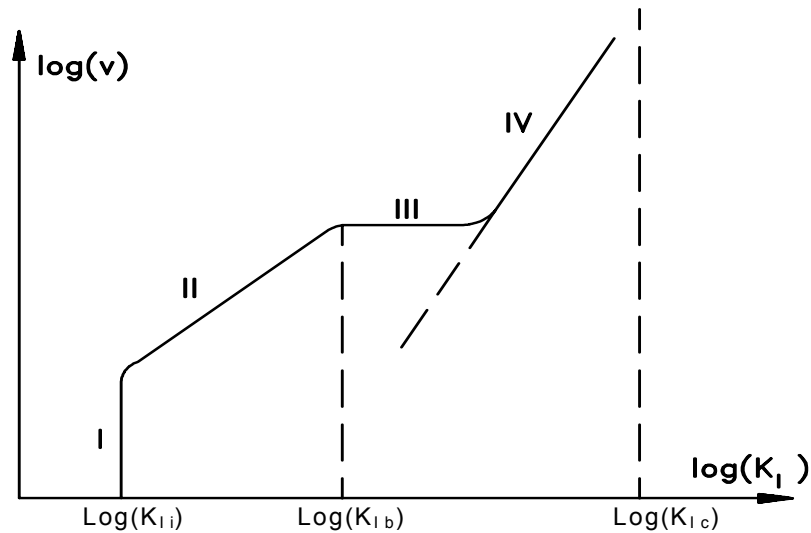


Fig. 9.1. Diagrama $\log(K_I) - \log(v)$

- *Domeniul IV* se înregistrează pentru valori mai mari ale factorului de intensitate a tensiunii. Acest domeniu este legat de un mecanism intrinsec cum este, de exemplu, o creștere datorată unui proces termic activ sau o creștere controlată printr-un proces de dislocații. Relația dintre K_I și v în zona IV este similară cu cea pentru zonele II și III, pentru care $n \approx 100$ la temperatura de bază și $n \approx 10$ la temperaturi înalte.

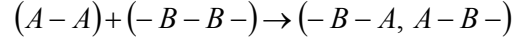
9.2. Mecanisme de propagare lentă a fisurilor

9.2.1. Propagarea lentă a fisurii la temperatura mediului ambiant

La temperatura mediului ambiant, propagarea lentă a fisurilor este controlată de interacția chimică între materialul de bază și mediul coroziv înconjurător (cel mai adesea apa) la nivelul vârfului fisurii. În cadrul acestei acțiuni pot interveni două mecanisme fundamentale: pe de o parte reacția chimică sau ruperea legăturilor, iar pe de altă parte fenomenul ce privește transportul de material în frontul fisurii.

9.2.1.1. Reacția chimică

Considerăm, în frontul fisurii, prezența moleculelor A-A aparținând mediului înconjurător, *figura 9.2* [261]. Aceste molecule reacționează cu moleculele B-B din materialul de bază rupând legătura dintre ele, după următoarea relație:



Pentru ruperea acestor legături trebuie furnizată o energie corespunzătoare prezenței unei bariere energetice. Presupunând că ruperea unei legături B a materialului implică o interacțiune cu n molecule A ale mediului înconjurător, vom avea:



în care prin B^* este indicată starea activă.

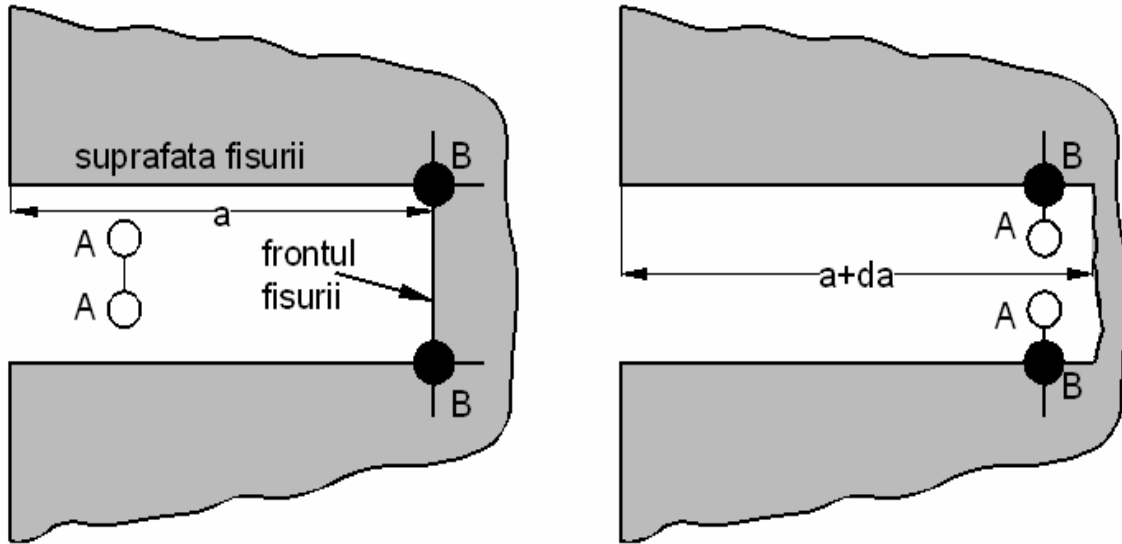


Fig. 9.2. Ruperea legăturilor la vârful fisurii prin reacție chimică

Schimbarea totală de energie a sistemului, atunci când fisura de lungime egală cu unitatea se propagă pe distanța da , cuprinde un termen chimic și unul mecanic:

$$\Delta U = -G_I da + (\mu_B^* - \mu_B - n\mu_A)Nda \quad (9.3)$$

unde:

- G_I reprezintă „forța” de propagare a fisurii;
- μ_B și μ_B^* sunt potențialele chimice ale legăturii B, înainte și după rupere’
- μ_A este potențialul chimic al mediului A aparținând mediului înconjurător;
- N reprezintă densitatea superficială a legăturilor B.

Viteza de propagare a fisurii este dată printr-o expresie de tip Anhemis:

$$v_r = v \cdot a \cdot e^{\left(\frac{U_0}{kT}\right)} e^{\left(\frac{\alpha G_I}{kT}\right)} e^{\left(\frac{\beta n \mu_A}{kT}\right)} \quad (9.4)$$

în care avem:

- ν – frecvența de atac;
- a – parametrul rețelei;
- $\alpha = \frac{a^2}{2}$; $\beta = \frac{1}{2}$;
- U_0 – energia de activare;
- k – constanta lui Boltzman;
- T – temperatura (grade K).

Pentru un gaz ideal potențialul chimic este egal cu:

$$\mu_A = \mu_A^0(T) + kT \ln p_A \quad (9.5)$$

în care $\mu_A^0(T)$ reprezintă potențialul chimic de referință, iar p_A este presiunea parțială a gazului în frontul fisurii.

Înlocuind relația (9.5) în relația (9.4) se obține:

$$\nu_r = C(T) \cdot p_A^{\beta \cdot n} \cdot e^{\left(\frac{-U_0}{kT}\right)} e^{\left(\frac{\alpha G_I}{kT}\right)} \quad (9.6)$$

în care $C(T)$ este un termen care variază lent cu temperatura. În cazul în care mediul ce reacționează este în soluție statică, presiunea se înlocuiește cu concentrația.

9.2.1.2. Mecanismul de transport

Atunci când concentrația în produșii reactanți este mică sau, pentru viteze de propagare mari, propagarea fisurii nu mai este controlată prin ruperea legăturilor ci prin transportul mediului reactiv spre frontul fisurii, *figura 9.3*.

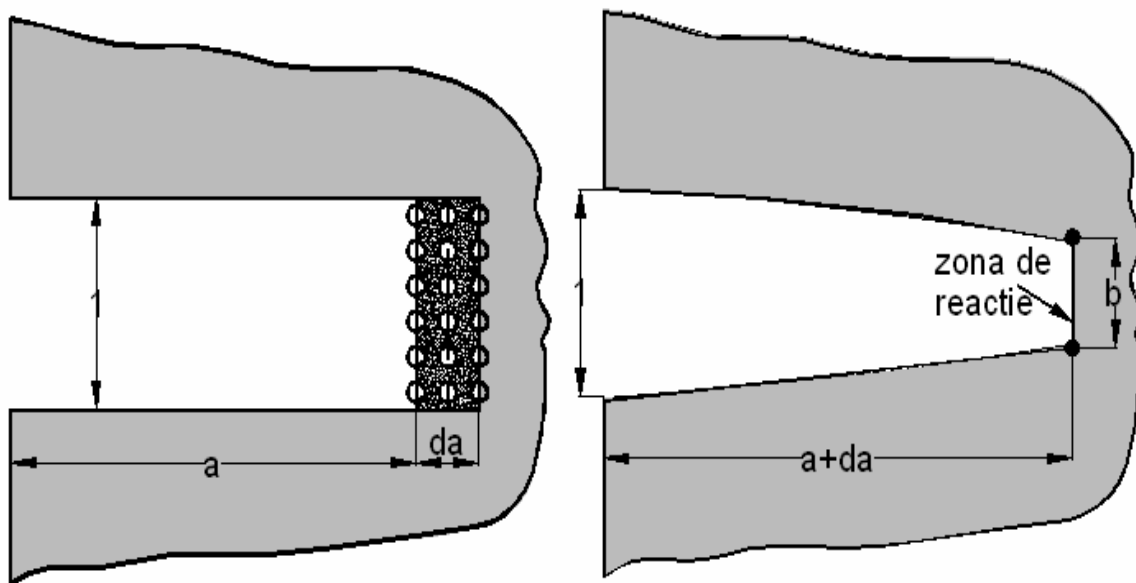


Fig. 9.3. Ruperea legăturilor prin mecanismul de transport

Considerăm că reacția chimică este cvasi-spontană: pentru un număr dM de molecule din mediul A ce se găsesc în frontul fisurii de lățime egală cu unitatea, numărul legăturilor B ce se vor rupe va fi egal cu:

$$dN = \frac{1}{n} dM$$

iar viteza de propagare este dată prin:

$$v_t = \frac{da}{dt} = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \frac{1}{nN} \frac{dM}{dt} \quad (9.7)$$

Sunt posibile diferite mecanisme de transport: *difuzia gazoasă* în lungul interfeței fisurii, *difuzia superficială* în lungul fețelor laterale ale fisurii sau *difuzia în volum*.

Considerăm cazul difuziei gazoase într-un mediu înconjurător cu gaz ideal.

Numărul moleculelor A care traversează o suprafață unitară pe unitatea de timp, conform teoriei cinetice a gazului, este egală cu:

$$\frac{1}{4} n_A \bar{v}_A \quad (9.8)$$

unde:

- $n_A = \frac{p_A}{kT}$ reprezintă densitatea moleculară;
- $\bar{v}_A = \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{\frac{1}{2}}$ este viteza medie a moleculelor;
- m este masa moleculară.

Dacă zona de reacție este de lățime b , pe unitatea de lățime a frontului fisurii vom avea:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{4} b n_A \bar{v}_A \quad (9.9)$$

Plecând de la relațiile (9.7), (9.8) și (9.9), se obține viteza de creștere a fisurii ca fiind:

$$v_t = \frac{1}{4} \frac{b n_A}{nN} \bar{v}_A = \frac{b p_A}{nN} \frac{1}{(2\pi m k T)^{\frac{1}{2}}} \quad (9.10)$$

Observăm că un rol important este jucat de concentrație, ca și în cazul vitezei controlate prin reacție chimică, relația (9.6), dar temperatura are un rol mai mic.

Reacția chimică nu este instantanee, iar fluxul de substanță se datorește diferenței de presiune între intrarea (p_A^0) și extremitatea fisurii (p_A). Dacă transportul este mult mai lent decât reacția chimică, extremitatea fisurii este o zonă sărăcită în molecule de tip A și ca urmare $p_A \ll p_A^0$ în timp ce, în caz contrar, p_A tinde spre p_A^0 .

Ținând cont de acest efect, relațiile (9.6) și (9.10) se rescriu astfel:

$$v = v_r \left(1 - \frac{p_A}{p_A^0} \right); \quad v = v_t \left(\frac{p_A}{p_A^0} \right)^{\beta_n} \quad (9.11)$$

Eliminând p_A din cele două relații precedente se obține următoarea relație valabilă pentru cele două procese, de reacție chimică și de transport:

$$\frac{v}{v_r} + \left(\frac{v}{v_t} \right)^{\frac{1}{\beta_n}} = 1 \quad (9.12)$$

Pentru valori mici ale lui G_I sau K_I , v_r este mult mai mic decât v_t și v tinde spre v_r (creștere limitată prin reacție). Pentru valori mari ale lui G_I sau K_I , v_r devine mult mai mare decât v_t și v tinde spre v_t (creștere limitată prin transport). Astfel, atunci când G_I sau K_I cresc, viteza de propagare a fisurii prezintă o creștere accentuată (v_r crește exponențial cu G_I) apoi apare o saturație (v_t este independent de G_I sau de K_I).

Primul caz, de creștere controlată prin reacție chimică, corespunde stadiului I de propagare a fisurii observat experimental, *figura 9.1*. În acest caz, relația care ar trebui utilizată pentru calculul vitezei de propagare a fisurii este (9.6) care prezintă o dependență exponențială cu K_I sau G_I . Deși în procedeele experimentale se utilizează cel mai adesea o relație de tipul $v = Ak_I^n$, trebuie remarcat faptul că nu există contradicții majore între teorie și experiment.

Efectul temperaturii este descris de relația:

$$\begin{aligned} v_r &= C(T) \cdot p_A^{\beta \cdot n} \cdot e^{\left(\frac{U_0 - \alpha G_I}{kT} \right)} \\ \text{sau} \quad v_r &= C(T) \cdot p_A^{\beta \cdot n} \cdot e^{\left(\frac{U_0 - \alpha' K_I}{kT} \right)} \end{aligned} \quad (9.13)$$

Energia de activare aparentă $U_0 - \alpha' K_I$ sau $U_0 - \alpha G_I$ poate fi dedusă din diagrama (K_I , v) pentru diferite temperaturi de lucru.

9.2.2. Propagarea lentă a fisurii la temperatură înaltă

Mecanismele de propagare lentă a fisurii la temperaturi înalte sunt, în general, independente de mediu. Creșterea este controlată de un mecanism de plasticitate în frontul fisurii. Poate apărea unul din următoarele mecanisme de plasticitate: pe de o parte alunecarea la nivelul limitelor dintre grăunți iar pe de altă parte mișcarea dislocațiilor, așa cum s-a văzut în *capitolul II*. Vom considera succesiv cele două mecanisme.

9.2.2.1. Alunecarea la nivelul limitelor dintre grăunți

Pentru materialele ale căror dislocații se deplasează mai greu, propagarea subcritică a fisurilor se poate produce prin alunecarea la nivelul limitelor dintre grăunți. Acest proces este schematizat în *figura 9.4*.

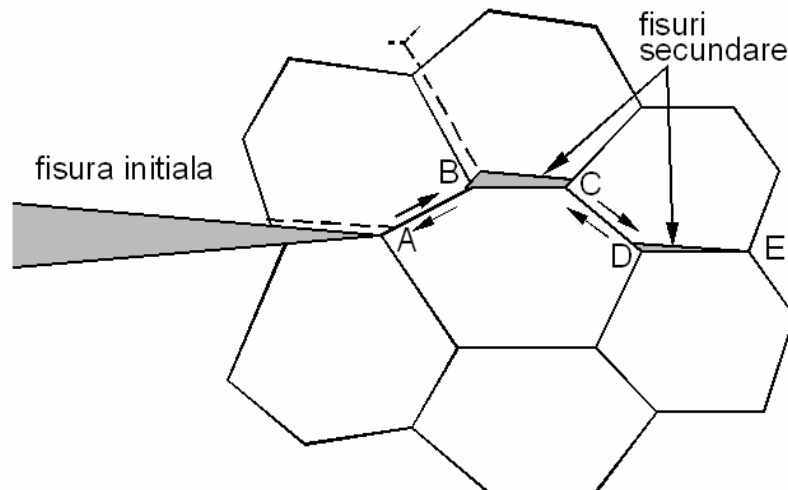


Fig. 9.4. Propagarea sub-critică a fisurilor prin alunecarea la nivelul limitelor dintre grăunți

Alunecarea se produce în lungul limitelor dintre grăunți, adiacente la fisura inițială (AB). Această deplasare este transferată prin grăunții rigizi la nodul triplu B. Atunci când deplasarea devine critică se produce fisurarea limitei BC. Pentru valori mari ale K_I , formarea acestor fisuri secundare poate antrena o decoeziune după AB, tensiunea în A atingând o valoare critică. Ca urmare, fisura primară se va propaga pe o distanță de ordinul mărimii grăuntelui. Pentru valori mici ale K_I , decoeziunea după AB nu are loc dar, formarea fisurii secundare conduce la o concentrare a tensiunilor în punctul C. În aceste condiții se produce o alunecare în lungul limitei DC și are loc fisurarea la nivelul limitelor grăunților după DE. Acest proces poate continua, în funcție de energia disponibilă pentru propagare, până când zona microfisurilor secundare va fi suficientă pentru a permite o creștere a fisurii primare. Evaluarea cantitativă a unui astfel de proces este dificilă și se poate admite că avem următoarea lege pentru viteza de propagare a fisurii:

$$v = v_0(d) K_I^n e^{\left(\frac{U}{kT}\right)} \quad (9.14)$$

$v_0(d)$ fiind funcție de mărimea grăunților.

9.2.2.2. Propagarea prin mișcarea dislocațiilor

În cazul materialelor cu comportament preponderent semi-fragil, limitele dintre grăunți pot juca rolul surselor de dislocații. Astfel, sub efectul câmpului de tensiuni al fisurii primare, poate fi activată o sursă de dislocații, *figura 9.5*.

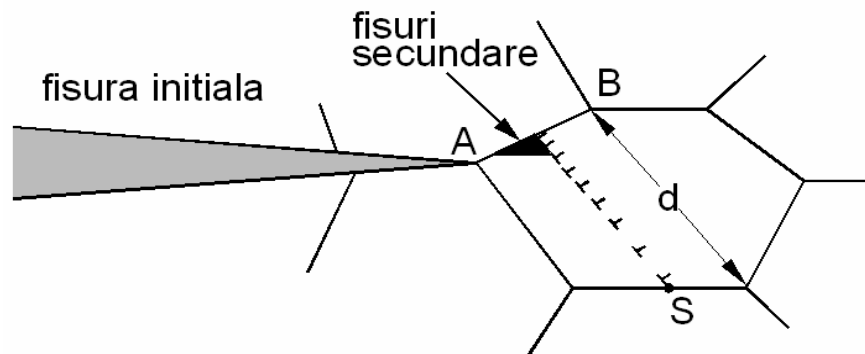


Fig. 9.5. Creșterea lentă prin crearea și mișcarea dislocațiilor

Dislocațiile astfel create se deplasează în lungul planelor de alunecare și se adună spre limita opusă a grăuntelui. Această îngrămădire a dislocațiilor conduce (vezi cap. 2) la o fisură secundară care antrenează decoeziunea AB. Se obține astfel o creștere lentă a fisurii. Numărul de dislocații emise de sursa S și care formează aglomerarea de pe limita opusă este dat de relația:

$$N = \frac{l(\tau - \tau_0)}{Gb} \quad (9.15)$$

unde:

- l reprezintă lungimea fisurii secundare ($l \approx d$ = mărimea grăuntelui);
- τ este tensiunea de forfecare medie ce acționează în planul de alunecare;
- τ_0 este tensiunea de rezistență a rețelei;
- G este modulul de elasticitate transversal;
- b reprezintă vectorul Burghers.

Tensiunea efectivă la capătul aglomerării este $N(\tau - \tau_0)$. Când această tensiune atinge valoarea tensiunii teoretice de decoeziune a rețelei, la capătul liniei de dislocații se formează o fisură. Astfel, vom avea:

$$\begin{aligned} N(\tau - \tau_0) &= \tau_{th} \\ \tau &= \tau_0 + \left(\frac{Gb\tau_{th}}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (9.16)$$

Tensiunea de forfecare τ este legată de factorul de intensitate a tensiunilor prin relația:

$$\tau = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta) \quad (9.17)$$

în care r este distanța de la vârful fisurii.

Înlocuind pe (9.17) în (9.16) se obține relația lui K_I necesară pentru inițierea unei fisuri secundare (în care $r=l$):

$$K_I = \alpha \tau_0 \sqrt{l} + \beta (b \tau_{th})^{\frac{1}{2}} \quad (9.18)$$

în care α și β sunt constante.

Pe de altă parte, viteza de deplasare a dislocațiilor este funcție de tensiunea aplicată și de temperatură:

$$v = v_0 \tau^m f(T) \quad (9.19)$$

unde m reprezintă sensibilitatea la viteza de deformare.

Astfel, plecând de la relațiile (9.19) și (9.18) se obține o relație între viteza de creștere a fisurii și factorul de intensitate a tensiunii, creșterea lentă fiind controlată prin deplasarea dislocațiilor.

9.2.3. Metode de obținere a diagramelor $v=f(K)$

Sunt două tipuri de metode utilizate în vederea determinării vitezei de propagare subcritice a fisurilor: pe de o parte, metode directe cu ajutorul cărora se determină diagrama $v=f(K)$, iar pe de altă parte metode indirecte care permit determinarea constantelor A și n din relația:

$$V = AK_I^n$$

În paragrafele următoare se vor prezenta două metode experimentale indirecte, utilizate pentru obținerea vitezei de creștere lentă a fisurilor.

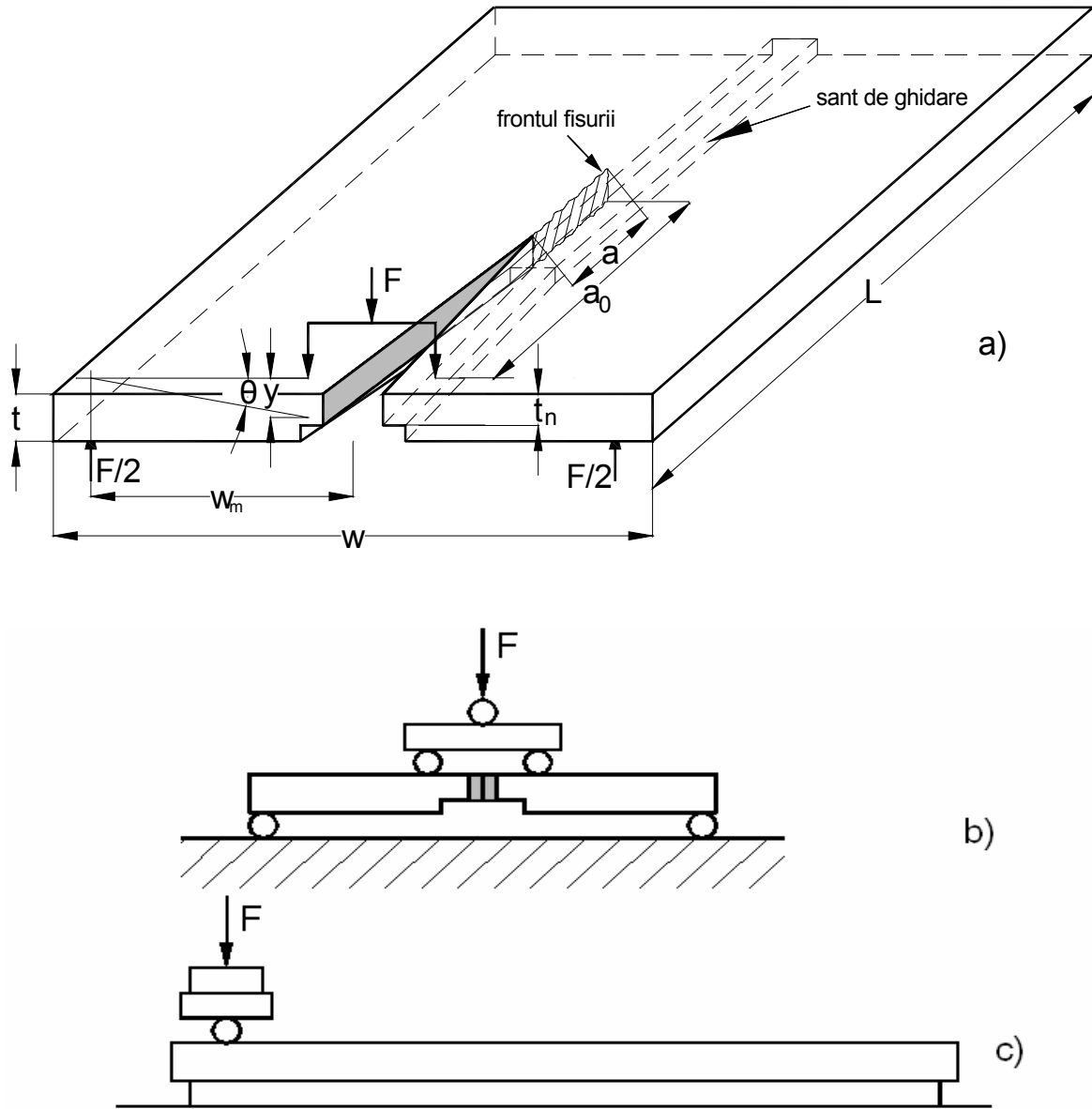
Epruvetă crestată solicitată la dublă torsiune

Epruveta prezentată în *figura 9.6* este solicitată la torsiune dublă prin încărcare în patru puncte. Se aplică o încărcare constantă ($K_I = \text{constant}$) și se măsoară viteza de creștere a fisurii care înaintază spre centrul probei. Lungimea fisurii propagate trebuie să fie mică în raport cu lungimea sa inițială pentru a evita o variație importantă a factorului de intensitate a tensiunilor în timpul solicitării. În general, creșterile trebuie să fie de aproximativ 0,5 mm pentru o fisură inițială de 2÷4 cm. .

Deplasarea y a punctului de aplicație a forței, pentru un solid elastic, este legată de încărcarea aplicată F prin relația:

$$y = CF \quad (9.20)$$

unde C reprezintă complianța epruvetei care depinde de geometria acesteia, de natura materialului și de mărimea fisurii.



a) vedere generală; b) vedere frontală; c) vedere laterală
Fig. 9.6. Epruveta pentru dublă torsiune cu șanț de ghidare

Experimental se observă că variația lui C cu mărimea fisurii este liniară:

$$C = \frac{y}{F} = Ba + D \quad (9.21)$$

Parametrii B și D depind de proprietățile elastice ale solidului și de dimensiunile epruvetei. Experimental s-a constatat faptul că această liniaritate nu este chiar respectată atunci când fisura este foarte mică relativ la dimensiunile probei sau destul de mare, apropiată de lungimea probei, *figura 9.7*.

Energia disponibilă pe unitatea de suprafață pentru propagarea fisurii, G , este dată de relația:

$$G = \frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial A} \right) \quad (9.22)$$

în care A este aria suprafeței nou fisurate.

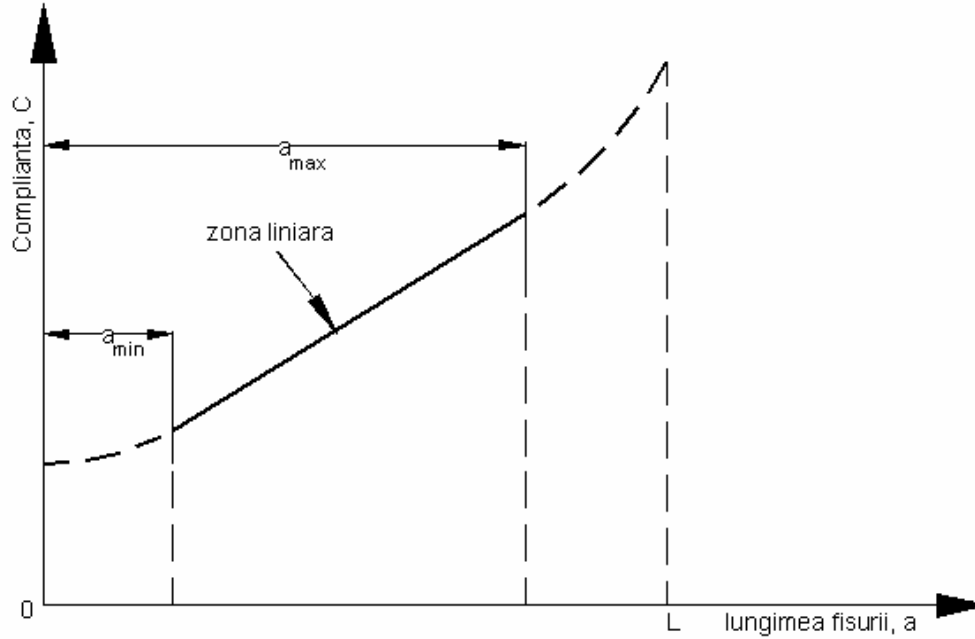


Fig. 9.7. Variația complianței cu lungimea fisurii

Diferențiind (9.21) și înlocuind în relația (9.22) se obține:

$$G = \frac{F^2}{2} \frac{B}{\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)} \quad (9.23)$$

Aria suprafeței nou fisurate este $A=a \cdot t_n$ și ca urmare vom avea:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right) = t_n \quad (9.24)$$

în care t_n este grosimea epruvetei în planul de fisurare, *figura 9.6a*.

Relația (9.24) implică faptul că profilul din frontul fisurii este drept. Dacă acest lucru nu se întâmplă trebuie impusă o anumită corecție. Astfel, ecuația (9.23) devine:

$$G = \frac{F^2 B}{2t_n} \quad (9.25)$$

Factorul de intensitate a tensiunilor este legat de G prin relațiile:

$$K_I = \sqrt{EG} \quad - \quad \text{stare plană de tensiuni};$$

$$K_I = \sqrt{\frac{EG}{1-\nu^2}} \quad - \quad \text{stare plană de deformații},$$

și ca urmare vom avea:

$$K_I = F \left(\frac{EB}{2t_n} \right)^{\frac{1}{2}} \quad - \quad \text{stare plană de tensiuni};$$

$$K_I = F \left(\frac{EB}{2(1-\nu^2)t_n} \right)^{\frac{1}{2}} \quad - \quad \text{stare plană de deformații}.$$

Dacă grosimea plăcii este mai mare decât valoarea rezultată din relația $2,5\left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c}\right)^2$, va trebui ca tenacitatea la fisurare să fie măsurată în cadrul stării plane de deformații. Parametrul B poate fi determinat experimental sau analitic.

Soluția analitică pentru determinarea complianței

Analiza efectuată decurge din cea făcută de Timoshenko și Goodier asupra plăcii rectangulare cu dublă torsiune [99].

Placa nu mai este prevăzută cu șanț de ghidare și se presupune că frontul fisurii este drept, figura 9.8.

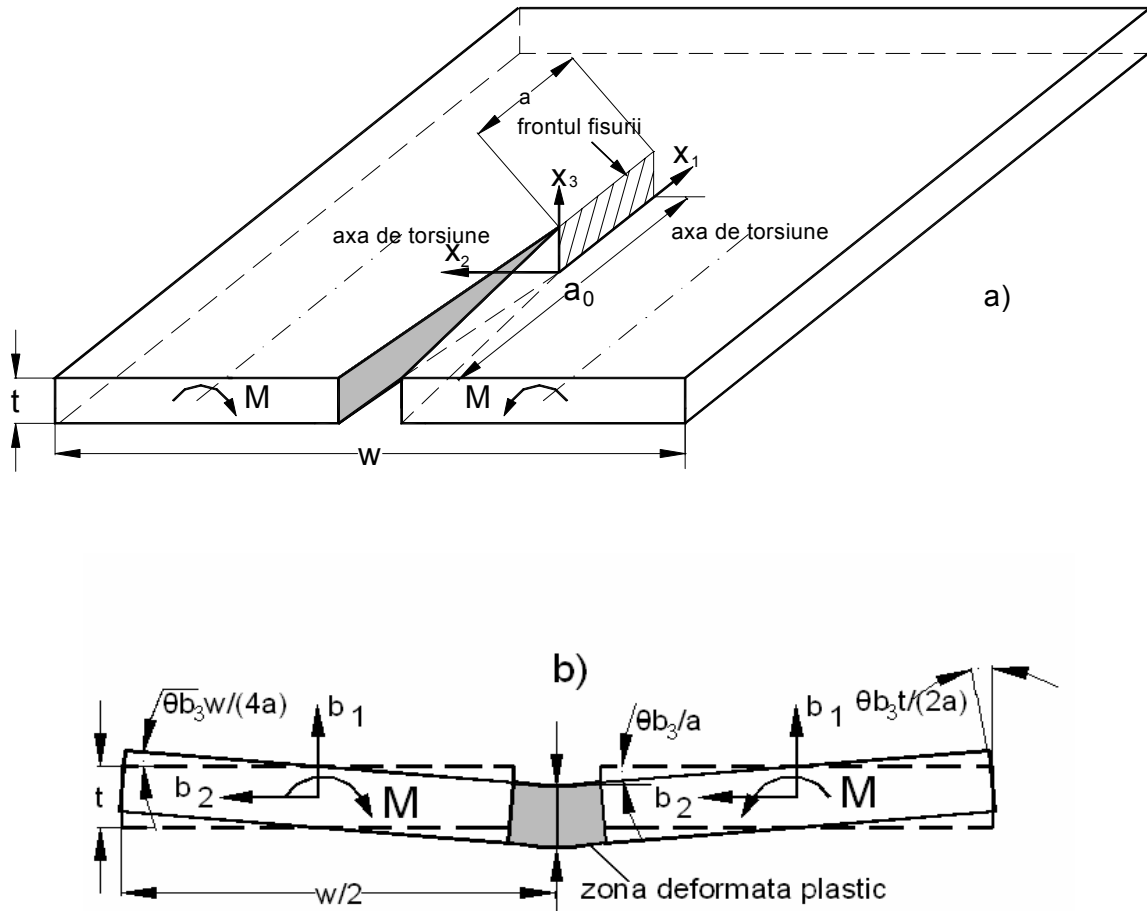


Fig. 9.8. Torsiune dublă și sistemul de coordonate

Intre cele două sisteme de coordonate alese sunt stabilite următoarele relații:

$$\begin{aligned} b_1 &= x_3 - \frac{t}{2} \\ b_2 &= x_2 \pm \frac{w}{4} \\ b_3 &= -x_1 \end{aligned} \quad (9.26)$$

În relația a doua din (9.26) semnul (+) corespunde barei din stânga iar semnul (-) barei din dreapta. Sub efectul momentului M de torsiune, aplicat fiecărei bare, are loc o rotire în jurul axei de torsiune (axa b_3) cu unghiul θ . Rotirea la distanța b_3 de vârful fisurii este egală cu:

$$(b_3) = \pm b_3 \frac{\theta}{a} = \pm x_1 \frac{\theta}{a} \quad (9.27)$$

Deformația stabilită pentru fiecare bară cuprinde două părți: o componentă dată de deformația prin torsiune pură și o deformare a secțiunii transversale. Componenta de torsiune pură este dată de deplasările în planul x_2x_3 a fiecărei bare, *figura 9.8*:

$$\begin{aligned} u_2 &= b_1 \theta (b_3) = \pm x_1 \left(x_3 - \frac{t}{2} \right) \frac{\theta}{a} \\ u_3 &= -b_1 \theta (b_3) = \pm x_1 \left(x_2 \pm \frac{w}{4} \right) \frac{\theta}{a} \end{aligned} \quad (9.28)$$

Componenta datorată deformării este descrisă de următoarea relație:

$$u_1 = \frac{\theta}{2} f(x_2, x_3) \quad (9.29)$$

Deformarea nu depinde de x_1 rămânând plană, toate secțiunile transversale, chiar dacă se deplasează și se deformează, rămân în planul lor inițial. Există o zonă a plăcii în care cele două bare considerate tind să se întrepătrundă prin deformare. Presupunem că efectele acestei întrepătrunderi sunt neglijabile. Această aproximare este cu atât mai valabilă cu cât placa este mai subțire.

În teoria elasticității, tensorul deformațiilor este dat prin:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (9.30)$$

sau sub formă matriceală:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\theta}{2a} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_2} \pm \left(x_3 - \frac{t}{2} \right) & \frac{\partial f}{\partial x_3} \pm \left(x_2 + \frac{w}{4} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \pm \left(x_3 - \frac{t}{2} \right) & 0 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \pm \left(x_2 + \frac{w}{4} \right) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tensorul tensiunilor este dat prin: $\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}$

în care cu μ s-a notat modulul de elasticitate transversal.

Tensiunile trebuie să satisfacă atât condițiile de echilibru cât și pe cele la limită:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{respectiv} \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \quad (9.31)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= 0 \quad \text{pentru } x_2=0 \text{ și } x_2=\pm w/2 \\ \sigma_{13} &= 0 \quad \text{pentru } x_3=0 \text{ și } x_3=t \end{aligned} \quad (9.32)$$

Se introduce o funcție de tensiuni $\Phi(x_2x_3)$ astfel încât:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} &= \sigma_{12} = \frac{\mu \theta}{a} \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} \pm \left(x_3 - \frac{t}{2} \right) \right] \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= \sigma_{13} = \frac{\mu \theta}{a} \left[\frac{\partial f}{\partial x_3} \pm \left(x_2 \pm \frac{w}{4} \right) \right] \end{aligned} \quad (9.33)$$

Astfel, ecuația de echilibru (9.31) este satisfăcută automat atât timp cât:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3 \partial x_2}$$

Plecând de la relațiile (9.32) se verifică ușor că funcția Φ trebuie să satisfacă ecuația diferențială:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = \pm \frac{2\mu\theta}{a} \quad (9.34)$$

cu următoarele condiții la limită:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0 \text{ pentru } x_2=0 \text{ și } x_2=\pm w/2$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0 \text{ pentru } x_3=0 \text{ și } x_3=t$$

Soluția ecuației diferențiale (9.34) este dată de:

$$\Phi(x_2, x_3) = \pm \left(8\mu\theta \frac{t^2}{a} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(2n-1)\pi]^3} \left\{ 1 - \frac{\cosh \left[\frac{(2n-1)\pi(4x_2/w \pm 1)}{2d} \right]}{\cosh \left[\frac{(2n-1)\pi}{2d} \right]} \right\} \sin \left[\frac{(2n-1)\pi x_3}{t} \right] \quad (9.35)$$

$$\sigma_{13} = \pm \left(8\mu\theta \frac{t}{a} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(2n-1)\pi]^2} \left\{ \frac{\sinh \left[\frac{(2n-1)\pi(4x_2/w \pm 1)}{2d} \right]}{\cosh \left[\frac{(2n-1)\pi}{2d} \right]} \right\} \sin \left[\frac{(2n-1)\pi x_3}{t} \right]$$

cu $d = \frac{2t}{w}$.

Forțele tăietoare exterioare pe unitatea de arie, aplicate la extremitățile epruvetei ($x_1=-a$), sunt egale și opuse tensiunilor σ_{ij} . Aceste forțe au o componentă după axele x_2 și x_3 : $F_2 = -\sigma_{12}$; $F_3 = -\sigma_{13}$.

În practică forțele aplicate nu sunt exact distribuite ca tensorul σ_{ij} dar aplicarea principiului lui Saint-Venant permite presupunerea că, deformația de torsiune depinde numai de momentul mediu, dacă se ia în considerare un punct aflat la o anumită distanță de punctul de aplicație a momentelor. Ca urmare, lungimea fisurii trebuie să fie suficient de mare.

Momentul de torsiune M aplicat pentru fiecare bară este:

$$M = \pm \int_{\pm w/2}^0 dx_2 \left\{ \int_0^t dx_3 \left[\left(x_3 - \frac{t}{2} \right) F_2 - \left(x_2 - \frac{t}{2} \right) F \right] \right\}$$

$$M = \pm \frac{\mu\theta}{a} \frac{wt^3}{6} \Psi \quad (9.36)$$

În care ψ este un factor de corecție funcție de d și are următoarea relație:

$$\Psi(d) = 1 - 192d \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tgh}(2n-1) \frac{\pi}{2} t}{(2n-1)\pi^5} \quad (9.37)$$

Factorul de corecție poate fi calculat, cu o eroare de cel mult 1%, pe baza următoarei expresii simplificate:

$$\Psi(d) = 1 - 0,6302d + 1,2de^{-\frac{\pi}{d}}$$

Complianța C este legată de momentul de torsiune prin relațiile:

$$C = \frac{y}{F}; \quad y = w_m \theta; \quad M = \frac{F}{2} w_m$$

$$\Rightarrow C = \frac{w_m^2 \theta}{2M}; \quad C' = \frac{3w_m^2 a}{\mu w t_3 \Psi(d)} \quad (9.38)$$

În aceste condiții se poate deduce panta B a curbei complianței:

$$B = \frac{3w_m^2}{\mu w t_3 \Psi(d)} \quad (9.39)$$

Introducând relația (9.39) în relațiile (9.26) se obțin următoarele relații pentru factorul de intensitate a tensiunii:

$$K_I = F w_m \left[\frac{3(1+\nu)}{w t^3 t_n \Psi(d)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad - \quad \text{starea plană de tensiuni} \quad (9.40)$$

$$K_I = F w_m \left[\frac{3}{w t^3 t_n (1-\nu) \Psi(d)} \right] \quad - \quad \text{starea plană de deformații}$$

Domeniul liniar al complianței (a_{\min} , a_{\max}) din *figura 9.7* se găsește între $[0,5w, L-w]$.

Sunt mai multe metode prin care se poate determina viteza de propagare lentă a fisurii, v , în funcție de factorul de intensitate a tensiunii K_I dat de relațiile (9.40).

Metoda relaxării

Diferențiind ecuația (9.21) $\left\{ \frac{y}{F} = Ba + D \right\}$ în raport cu timpul vom avea:

$$\frac{dy}{dt} = (Ba + D) \frac{dF}{dt} + FB \frac{da}{dt} \quad (9.41)$$

în care

$$\frac{da}{dt} = v \quad (9.42)$$

reprezintă viteza de creștere a fisurii. În cazul metodei relaxării se determină valoarea maximă a lui y pentru care fisura se propagă fără a mai fi necesară o deplasare în continuare. Ca urmare, în timpul propagării fisurii $y = \text{const.}$ și vom avea $\frac{dy}{dt} = 0$. În aceste condiții relația (9.41) devine:

$$v = - \frac{Ba + D}{BF} \left(\frac{dF}{dt} \right)_{y=\text{const}} \quad (9.43)$$

sau

$$v = - \frac{y}{B} \frac{1}{F^2} \left(\frac{dF}{dt} \right)_{y=\text{const}}$$

în care $\left(\frac{dF}{dt} \right)_{y=\text{const}}$ reprezintă relaxarea încărcării observată în timpul încercării.

Pe de altă parte, cum deplasarea y este constantă se poate scrie:

$$y = F(Ba + D) = F_{i,f}(Ba_{i,f} + D)$$

în care $F_{i,f}$ și $a_{i,f}$ reprezintă valorile inițiale și finale ale forței respectiv ale dimensiunii fisurii.

Înlocuind această ultima relație în a doua relație (9.43) se obține:

$$v = -\frac{F_{i,f}(a_{i,f} + \frac{D}{B})}{F^2} \left(\frac{dF}{dt} \right)_{y=const} \quad (9.44)$$

Ca urmare, s-a obținut viteza de creștere lentă a fisurii v pornind de la valoarea relaxării încărcării $\left(\frac{dF}{dt} \right)_{y=const}$ și ale valorilor inițiale și finale ale lui F . Practic, se aplică o forță $F_i < 0,95F_c$ (F_c fiind forța critică determinată în momentul ruperii). Când se atinge F_i se oprește deplasarea traversei mașinii de încercat și se înregistrează variația forței în funcție de timp, obținându-se astfel diagrama (K_I, v), K_I fiind determinată cu ajutorul relațiilor (9.40). În cadrul acestei metode trebuie să se țină seama de relaxările parazite ale sistemului de încărcare și a mașinii de încercat, acestea conducând la rezultate greșite. Tehnica relaxării este foarte sensibilă la variațiile de temperatură ale montajului care provoacă variații ale lungimii echipamentului utilizat. Pentru viteze mici de propagare a fisurii trebuie obținută o foarte bună stabilitate la temperatură.

Avantajul esențial al tehnicii de relaxare este acela că permite efectuarea măsurătorilor de viteză fără observarea directă a fisurii. Din acest punct de vedere această metodă este indicată pentru materialele opace, aflate în mediu coroziv sau la temperatură înaltă. Așa cum s-a menționat, nu de fiecare dată se obține o suprafață dreaptă a frontului fisurii. Fisura este mai lungă pe fața supusă la tracțiune – fața inferioară corespunzătoare șanțului de ghidare – și mai scurtă pe suprafața supusă la compresiune – fața superioară, *figura 9.9*. Această diferență este mai mult sau mai puțin pronunțată în funcție de material.

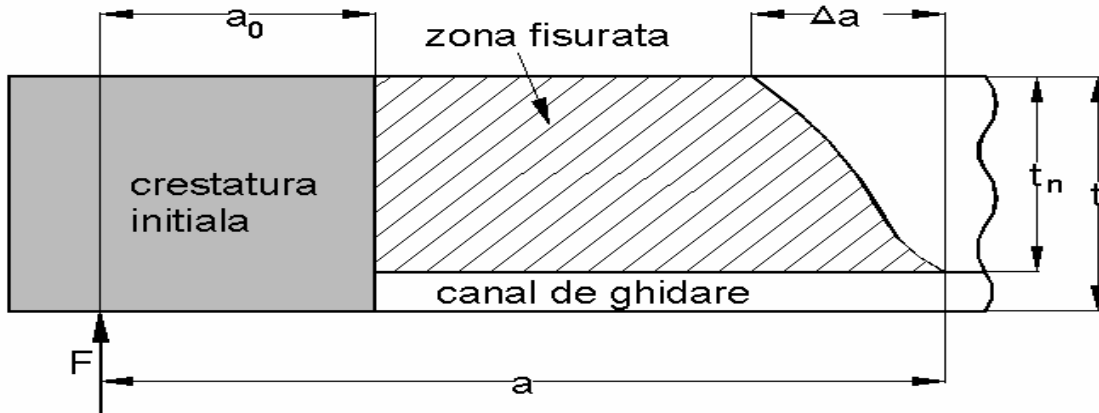


Fig. 9.9. Frontul fisurii la solicitarea în dublă torsiune

Această formă antrenează o anumită corecție asupra vitezei de propagare a fisurii dată prin relația (9.44):

$$v = -\Phi \frac{a_i F_i}{F^2} \left(\frac{dF}{dt} \right)_{y=const} \quad (9.45)$$

cu $\Phi = \frac{t}{\sqrt{\Delta a^2 + t^2}}$ pentru un material la care $a_i \gg \frac{D}{B}$, fiind și cazul cel mai des întâlnit.

Această metodă constă în solicitarea probei cu viteză de deplasare constantă. Astfel, viteza de deplasare a mașinii este compensată prin variația complianței epruvetei datorate creșterii fisurii. Încărcarea rămânând constantă se observă un palier în curba de încărcare.

Plecând de la relațiile (9.41) și (9.42) și având în vedere că $F = \text{const.}$ deci $\frac{dF}{dt} = 0$, se obține viteza de propagare a fisurii ca fiind:

$$v = \frac{1}{FB} \frac{dy}{dt} \quad (9.46)$$

Se fac încercări pentru diferite valori ale lui y și se măsoară forța F corespunzătoare palierului de solicitare, *figura 9.10*. Cu ajutorul *relației* (9.46) se va determina viteza de propagare a fisurii, iar din *relația* (9.40) se va deduce factorul de intensitate a tensiunii K_I .

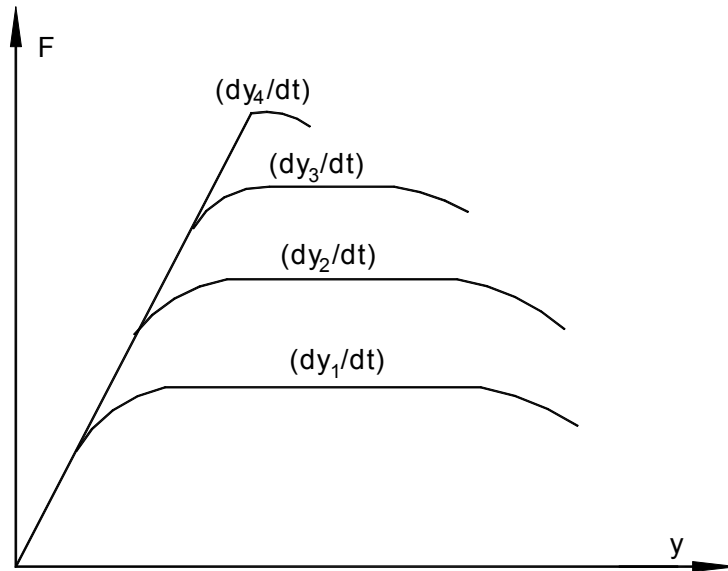


Fig. 9.9. Curbe caracteristice forță-deplasare pentru $\frac{dy}{dt} = \text{const.}$

În general, cu ajutorul unei epruvete se pot determina mai multe puncte ale diagramei (K_I , v). Se aplică o forță F constantă și se măsoară viteza de deplasare $\frac{dy}{dt}$.

Această viteză trebuie să fie constantă și se introduce în *relația* (9.46).

Această metodă prezintă avantajul de a fi insensibilă la mici variații ale temperaturii și poate fi utilizată pentru efectuarea măsurărilor în timp foarte mare, ceea ce permite efectuarea unor viteze de propagare foarte mici.

Metoda cu viteză de deplasare constantă poate fi combinată cu metoda relaxării pentru eliminarea lungimii fisurii din *relația* (9.44). Astfel, se oprește mașina de încercat după atingerea palierului din *figura* (9.9) și ca urmare se blochează deplasarea traversei mașinii de încercat, înregistrându-se variația forței în funcție de timp.

Viteza de propagare la palier este egală cu:

$$v = \frac{1}{F_i B} \frac{dy}{dt}$$

Viteza de propagare la începutul relaxării este dată de prima din relațiile (9.43):

$$v = -\frac{Ba_i + D}{BF_i} \left(\frac{dF}{dt} \right)_i$$

în care indicele i reprezintă valorile inițiale la începutul relaxării.

Cum cele două viteze anterioare sunt egale, și utilizând și relația (9.41) vom avea:

$$Ba_i + D = \frac{\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dF}{dt} \right)_i} = \frac{(Ba + D)F}{F_i}$$

Substituind $(Ba+D)$ din această ultimă relație, în prima din relațiile (9.43) se obține:

$$v = \frac{F_i \frac{dy}{dt}}{F^2 B} \frac{1}{\left(\frac{dF}{dt} \right)_i} \left(\frac{dF}{dt} \right) = \left(\frac{F_i}{F} \right)^2 v_i \frac{\left(\frac{dF}{dt} \right)}{\left(\frac{dF}{dt} \right)_i} \quad (9.47)$$

în care $v_i = \frac{1}{F_i B} \left(\frac{dy}{dt} \right)$ este viteza inițială de propagare a fisurii.

Cu ajutorul metodei ce ia în considerare viteza de deplasare constantă, se poate determina ușor valoarea lui n din relația $v = AK_I^n$. Viteza de deplasare a traversei mașinii de încercat, dată prin relația $\frac{dy}{dt} = BFv$ este proporțională cu K_I^{n+1} . Pentru o schimbare a vitezei de deplasare de la $\frac{dy_1}{dt}$ la $\frac{dy_2}{dt}$ se obține relația:

$$\frac{\frac{dy_1}{dt}}{\frac{dy_2}{dt}} = \left(\frac{K_1}{K_2} \right)^{n+1} = \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^{n+1} \quad (9.48)$$

Această din urmă relație permite obținerea directă a lui n . Dacă propagarea fisurii este însoțită de o deformare plastică importantă, relațiile precedente nu mai sunt valabile deoarece ele au fost stabilite în cadrul elasticității liniare.

9.3. Siguranța în funcționare: oboseala statică și dinamică, diagramele RPT, determinarea duratei de viață

9.3.1. Oboseala statică

Foarte multe materiale prezintă un fenomen de rupere întârziată, atât la temperatura ambiantă cât și la temperatură înaltă. Această rupere întârziată se datorește creșterii lente a fisurilor care se produce pentru o tensiune aplicată σ_a inferioară tensiunii de rupere catastrofale.

Timpul până la rupere t_r , pentru o anumită tensiune aplicată σ_a constantă, corespunde timpului necesar pentru ca defectul să atingă mărimea sa critică, corespunzătoare lui σ_a sau când factorul de intensitate a tensiunilor atinge valoarea critică K_{Ic} . Acest timp până la rupere este dat de relația:

$$t_r = \int_{a_i}^{a_c} \frac{da}{v} \quad (9.49)$$

în care:

- v = viteza de creștere subcritică;
- a_i = mărimea inițială a defectului care va deveni critic;
- a_c = mărimea critică a defectului care va duce la rupere.

Relația pentru factorul de intensitate a tensiunii fiind: $K_I = Y\sigma_a\sqrt{\pi a}$ se va obține:

$$da = \frac{2K_I dK_I}{\pi\sigma_a^2 Y^2} \quad (9.50)$$

Substituind (9.50) în (9.49) va rezulta:

$$t_r = \frac{2}{\sigma_a^2 \pi Y^2} \int_{K_{li}}^{K_{lc}} \left(\frac{K_I}{v} \right) dK_I \quad (9.51)$$

în care:

- K_{li} este factorul de intensitate a tensiunilor la nivelul defectului inițial;
- K_{lc} este factorul critic de intensitate a tensiunilor.

Cunoscând K_{lc} (constantă de material), determinarea lui t_r impune calculul valorii pentru K_{li} (sau a_i) și pe de altă parte cunoașterea relațiilor ce există între K_I și v pentru condițiile date. În cazul în care viteza de propagare subcritică poate fi exprimată printr-o lege de forma $v = AK_I^n$, timpul până la rupere poate fi determinat pe baza relației:

$$t_r = \frac{2}{\sigma_a^2 \pi Y^2} \left[\frac{1}{A_{II}} \int_{K_{li}}^{K_{Ib}} K_I^{(1-n_{II})} dK_I + \frac{1}{A_{III}} \int_{K_{Ib}}^{K_{I,IV}} K_I dK_I + \frac{1}{A_{IV}} \int_{K_{I,IV}}^{K_{lc}} K_I^{(1-n_{IV})} dK_I + \right] \quad (9.52)$$

unde:

- K_{li} reprezintă valoarea lui K_I la începutul stadiului II, liniar, de propagare, *figura 9.1*;
- K_{Ib} reprezintă valoarea lui K_I la începutul stadiului III de propagare;
- $K_{I,IV}$ reprezintă valoarea lui K_I la începutul stadiului IV de propagare.

Atunci când sunt prezente doar regiunile II și III, al treilea termen corespunzător domeniului IV poate fi neglijat. Pe de altă parte, al doilea termen poate fi de asemenea neglijat dacă timpul până la rupere este controlat de comportamentul materialului în domeniul al III-lea (cazul materialelor fragile solicitate la temperatura ambiantă). În alte cazuri poate fi preponderent domeniul IV. În aceste condiții relația (9.52) se reduce la:

$$t_r = \frac{2}{\sigma_a^2 \pi Y^2} \left[\frac{1}{A_{II}} \int_{K_{li}}^{K_{Ib}} K_I^{(1-n_{II})} dK_I \right] \quad (9.53)$$

când domeniul II predomină sau:

$$t_r = \frac{2}{\sigma_a^2 \pi Y^2} \left[\frac{1}{A_{IV}} \int_{K_{I,i}}^{K_{lc}} K_I^{(1-n_{IV})} dK_I \right] \quad (9.54)$$

atunci când este prezent numai domeniul IV.

Prin integrare se obține:

$$t_r = \frac{2}{\sigma_a^2 \pi Y^2 A(n-2)} \left[K_{li}^{2-n} - K_{Ib(sauc)}^{2-n} \right] \quad (9.55)$$

În general, n are valori mari pentru materialele cu comportament preponderent fragil ($n > 10$) și cum $K_{li} < K_{Ib(sauc)}$ se poate admite că: $K_{li}^{2-n} \gg K_{Ib(sauc)}^{2-n}$ și ca urmare relația (9.55) devine:

$$t_r = \frac{2K_{li}^{2-n}}{\sigma_a^2 \pi Y^2 A(n-2)} \quad (9.56)$$

Factorul de intensitate a tensiunilor inițial este $K_{II} = \sigma_a Y \sqrt{\pi a_i}$ iar la rupere $K_{Ic} = \sigma_c Y \sqrt{\pi a_c}$ unde σ_c reprezintă rezistența la rupere a materialului în absența propagării subcritice a fisurii (în mediu inert), de unde rezultă: $K_{II} = \frac{\sigma_a}{\sigma_c} K_{Ic}$, pentru $a_i \approx a_c$.

Astfel, t_r devine:

$$t_r = \frac{2K_{Ic}^{2-n}}{\sigma_a^2 \pi Y^2 A(n-2) \sigma_c^{2-n}} \sigma_a^{-n} \quad (9.57)$$

Se constată faptul că timpul până la rupere descrește atunci când tensiunea crește. Produsul $(t_r \sigma_a^n)$ este constant pentru un material dat și într-un mediu înconjurător dat. În toate relațiile precedente valorile pentru t_r sunt valori medii deoarece nu se ține cont de împrăștierea valorilor rezistenței la rupere.

9.3.2. Diagrama Rezistență-Probabilitate-Timp (RPT)

Distribuția rezistenței la rupere este descrisă de analiza Weibull, relația (2.48), care după unele transformări devine:

$$\ln \left\{ \ln \left[\frac{1}{1-P_R} \right] \right\} = m \ln \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_0} \right) \quad (9.58)$$

în care P_R este probabilitatea de rupere corespunzătoare tensiunii critice σ_c .

Eliminând σ_c din relația (9.58) în relația (9.57), va rezulta:

$$\ln(t_r) = \frac{n-2}{m} \ln \left[\ln \left(\frac{1}{1-P_R} \right) \right] - n \ln(\sigma_a) + (n-2) \ln \sigma_0 + \ln \left[\frac{2}{\sigma A Y^2 (n-2) K_{Ic}^{n-2}} \right] \quad (9.59)$$

sau:

$$t_r = \sigma_a^{-n} f(P_R)$$

În figura 9.10 sunt prezentate rezultatele obținute în cazul carburii și nitrurii de siliciu presate la cald. Valorile lui n obținute plecând de la aceste rezultate sunt:

- pentru carbura de siliciu: $n=40$ la 1273 K
 $n=23$ la 1373 K
 $n=14$ la 1573 K
- pentru nitrura de siliciu: $n=90$ la 1273 K
 $n=38$ la 1373 K

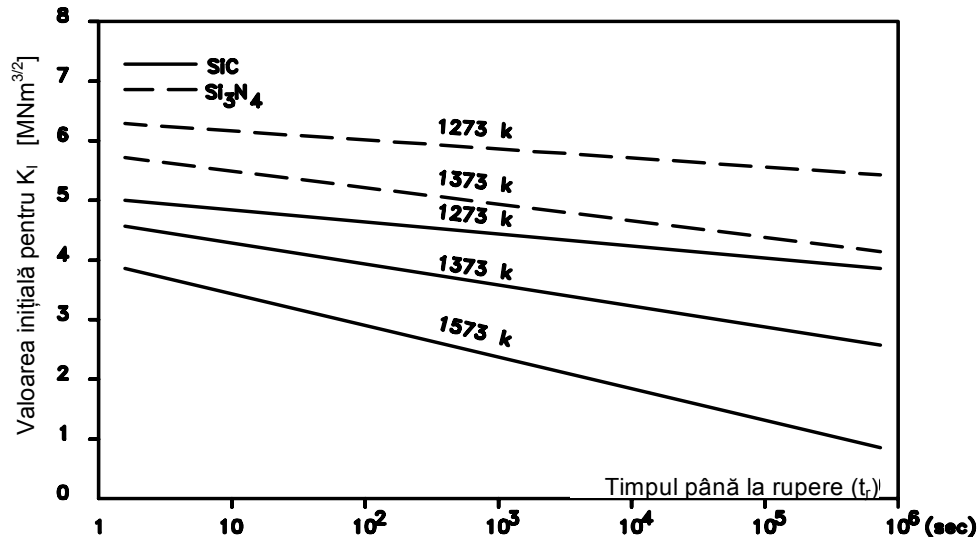


Fig. 9.10. Variația timpilor până la rupere cu tensiunea (exprimată prin K_{II})

Relația (9.59) arată că, pentru o valoare dată a probabilității de rupere P_R , timpul până la rupere în cadrul oboselii statice este o funcție logaritmică de tensiunea aplicată. Dacă reprezentăm pe un grafic $\log(t_r)$ în funcție de $\log(\sigma_a)$, se obțin o serie de drepte de pantă m , fiecare din aceste drepte corespunzând unei valori diferite pentru P_R . În *figura 9.11a* se prezintă o astfel de diagramă stabilită la temperatura ambiantă pentru porțelan. Se poate construi și un alt tip de diagramă, echivalentă cu precedenta, și care prezintă valorile rezistenței la rupere corespunzătoare unui timp până la rupere, pe o diagramă Weibull, *figura 9.11b*.

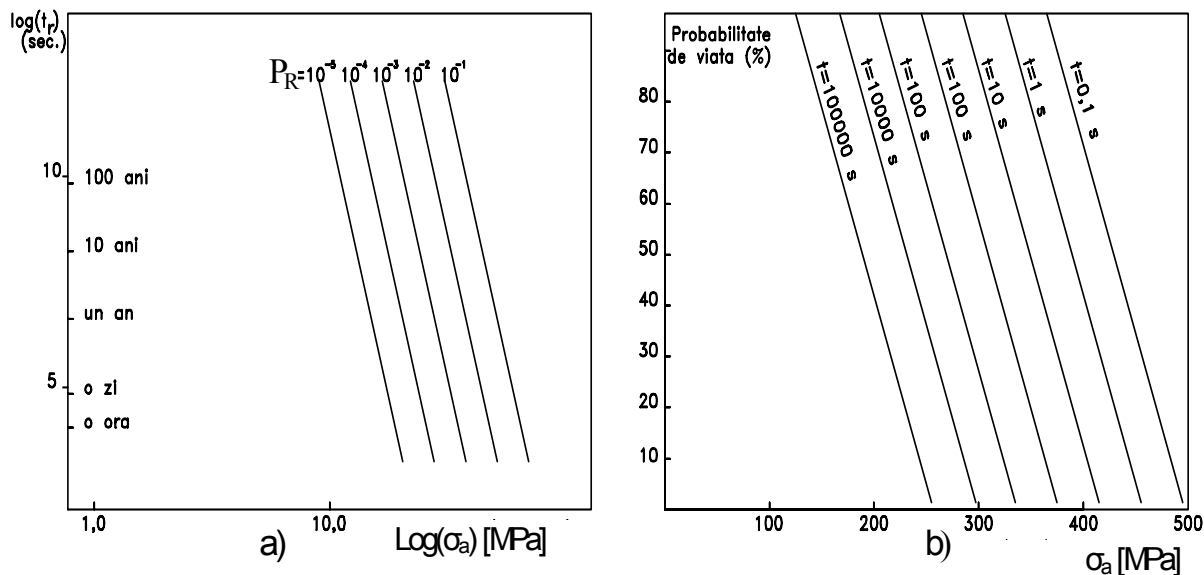


Fig. 9.11. Diagrama RPT: a)- pentru porțelan; b)- pentru aluminiă (95%)

Aceste diagrame sunt constituite dintr-o familie de drepte paralele, echidistante pentru creșteri logaritmice egale ale timpilor de rupere (spațiul crește atunci când n scade). Diagramele RPT nu sunt valabile decât pentru condițiile în care probele au fost încercate.