

CAPITOLUL 4

PLASTICITATEA LA VÂRFUL FISURII

-
- 4.1. *Introducere*
 - 4.2. *Integrala J*
 - 4.3. *Curbe de rezistență la creșterea fisurii în domeniul elasto-plastic*
 - 4.4. *Mărimea zonei plastice de la vârful fisurii în acord cu modelul Irwin*
 - 4.5. *Mărimea zonei plastice în acord cu modelul Dugdale. Modelul benzilor de alunecare*
 - 4.6. *Determinarea formei aproximative a zonei deformată plastic pe baza criteriilor Tresca și von Mises*
 - 4.7. *Starea de tensiuni în apropierea vârfului fisurii*
 - 4.8. *Planele tensiunii tangențiale maxime*
 - 4.9. *Influența stării de tensiune asupra comportării la fisurare*
-

4.1. Introducere

Noțiunile specifice Mecanicii ruperii prezentate anterior se bazează pe extinderea unei fisuri în condiții elastice. Asemenea condiții se întâlnesc la starea plană de deformare pentru materialele cu rezistență la rupere ridicată precum și la ruperea unor materiale fragile. Conceptele Mecanicii ruperii în domeniul linear-elastic (MRLE) pot fi aplicate, cu anumite restricții, și în cazul când enclava plastică formată în jurul vârfului fisurii are dimensiuni reduse, [26, 27]. Există totuși o categorie largă de materiale ductile pentru care comportarea la rupere nu mai poate fi analizată pe baza conceptelor MRLE. Pentru aceste cazuri s-au dezvoltat o serie de metode cuprinse în cadrul Mecanicii ruperii din domeniul elasto-plastic (MREP), *figura 4.1*.

Atunci când deformările plastice se extind în întreaga structură antrenând și o ecruisare a tuturor fibrelor se obține un colaps plastic sau o plasticitate generalizată. Colapsul plastic se analizează pe baza stărilor limită, [140].

În cele ce urmează se vor prezenta numai unele noțiuni generale privind MREP.

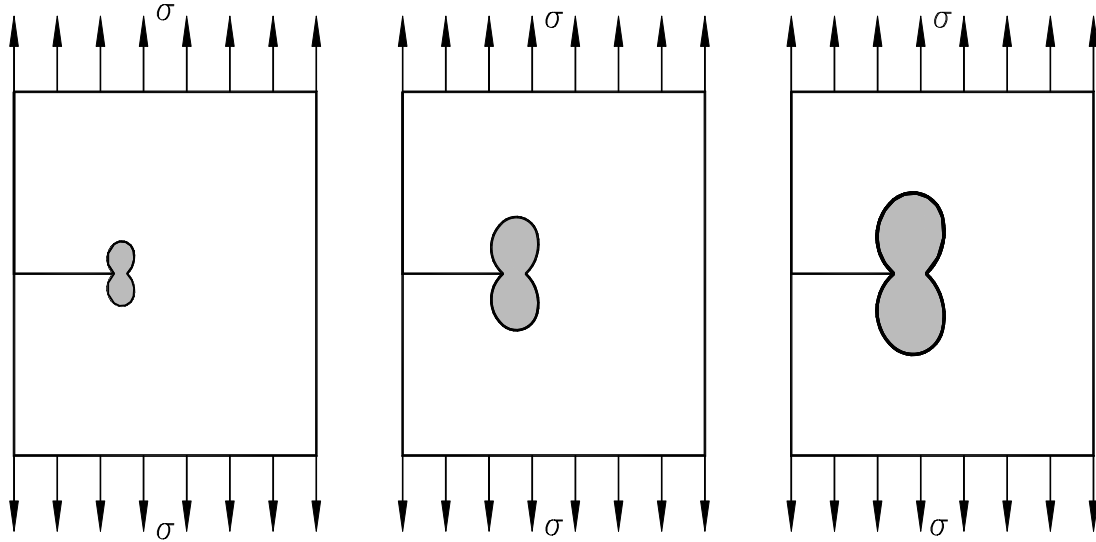
O primă caracteristică a MREP este aceea că exprimă o situație între două stări particulare și anume MRLE și colapsul plastic, ce corespunde unei curgeri plastice generalizate.

O altă caracteristică a MREP constă în faptul că ia în considerare creșterea în condiții de stabilitate a fisurii înainte de ruperea finală. Propagarea stabilă a fisurii a fost prezentată inițial de Kraft utilizând curbele R, [161]. Acest concept presupune că rezistența la rupere evoluează în cursul creșterii stabile a fisurii, în special pe baza apariției deformărilor plastice.

Feddersen a propus o metodă care permite evaluarea tensiunilor critice σ_{cr} (tensiunile globale la rupere) care intervin în condițiile instabilității elasto-plastice.

Pentru un material dat, cu tenacitatea echivalentă K_{Ic}^e , relația dintre tensiunea critică și lungimea fisurii inițiale $2a_0$, în cazul unei plăci cu fisură centrală, este dată de relația:

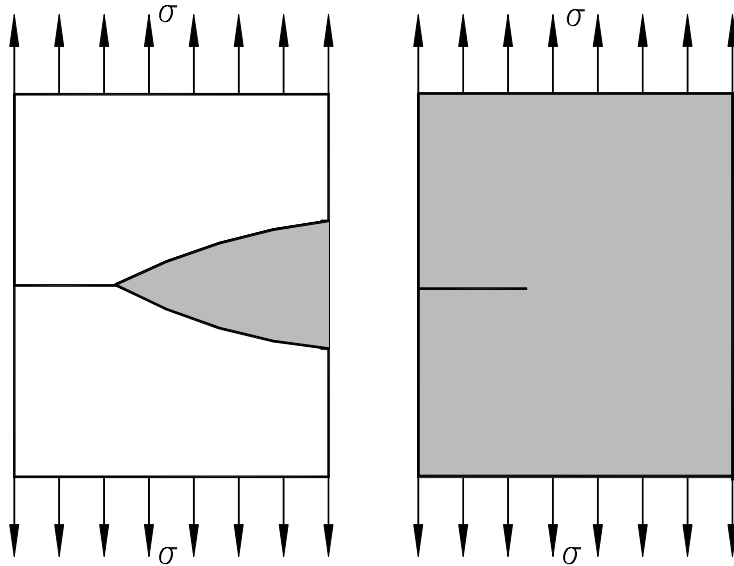
$$\sigma_{cr} = \frac{K_{Ic}^e}{\sqrt{\pi a_0}} \quad (4.1)$$



1. Materiale cu rezistența la rupere ridicată în condițiile stării plane de deformatie

2. Materiale cu rezistența la rupere ridicată în condițiile stării plane de tensiune

3. Materiale ductile în condițiile stării plane de tensiune sau deformatie



4. Materiale ductile caracterizate printr-o instabilitate plastică

5. Materiale ductile ideal plastice (plasticitate generalizată)

1+2 = MRLE; 2+3+4 = MREP; 5 = colaps plastic

Fig. 4.1. Domeniile ruperii elastice și elasto-plastice

În figura 4.2 este prezentată dependența dintre tensiunea critică σ_{cr} și lungimea fisurii inițiale $2a_0$ pentru un K_{Ic}^e dat.

Atunci când lungimea fisurii $2a_0=0$, tensiunea σ_{cr} care tinde spre infinit se limitează la valoarea corespunzătoare limitei de curgere σ_c . Pe de altă parte, lungimea maximă a fisurii nu poate depăși lățimea probei: $2a_0 \leq W$. Unind cele două puncte extreme se obține așa-zisa linie pentru care curgerea cuprinde întreaga secțiune.

Feddersen [140] propune trasarea a două tangente la curba $\sigma_{cr} = \frac{K_{lc}^e}{\sqrt{\pi a_0}}$, una dusă din punctul de coordonate $(0, \sigma_c)$ și alta din punctul de coordonate $(W, 0)$.

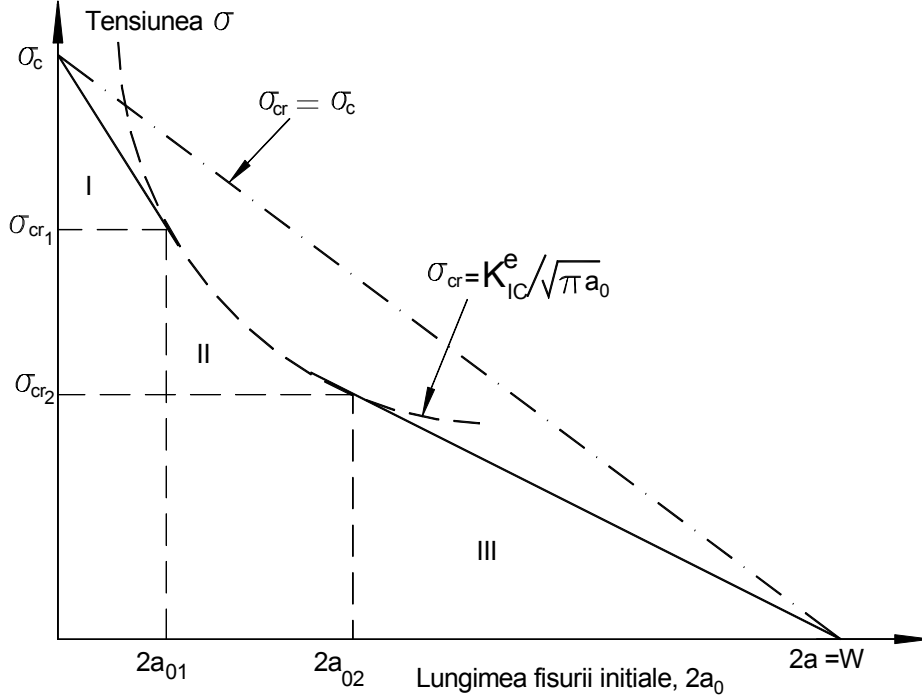


Fig. 4.2. Dependenta dintre tensiunea critică σ_{cr} și lungimea fisurii inițiale

Panta tangentei la curba considerată se obține din condiția:

$$\frac{d\sigma}{d(2a_0)} = \frac{d}{d(2a_0)} \left(\frac{K_{lc}^e}{\sqrt{\pi a_0}} \right) = -\frac{\sigma}{4a_0} \quad (4.2)$$

Pe această bază se poate calcula panta tangentei în punctul de coordonate $(0, \sigma_c)$ și se obține:

$$-\frac{\sigma_{cr1}}{4a_{01}} = -\frac{\sigma_c - \sigma_{cr1}}{2a_{01}} \quad (4.3)$$

de unde $\sigma_{cr1} = \frac{2\sigma_c}{3}$, respectiv $2a_{01} = \frac{4,5K_{lc}^e}{\pi\sigma_c}$.

Procedând în mod analog și pentru punctul de coordonate $(W, 0)$ rezultă:

$$-\frac{\sigma_{cr2}}{4a_{02}} = -\frac{\sigma_{cr2}}{W - 2a_{02}} \quad (4.4)$$

de unde $\sigma_{cr2} = K_{lc}^e \sqrt{\frac{6}{\pi W}}$, respectiv $2a_{02} = \frac{W}{3}$.

După Feddersen [140] instabilitatea plastică se produce în *domeniul I* când într-un număr mare de fibre tensiunea critică depășește valoarea dată de relația $\frac{2\sigma_c}{3}$. Tot o instabilitate plastică apare și în *domeniul III*, într-un număr mai mic de fibre a căror lățime totală nu depășește valoarea $W/3$. Intre cele două domenii se plasează o zonă în care instabilitatea fisurii se produce în condiții elastice, când tensiunea critică este corelată cu tenacitatea echivalentă.

Pentru calculul în domeniul elasto-plastic au fost propuse o serie de criterii, dintre care amintim: integrala J, curbele R, deplasarea la vârful fisurii, etc.

4.2. Integrala J

4.2.1. Expresia integralei J

Conceptul *integralei J* a rezultat din examinarea bilanțului energetic și a fost prezentat pentru prima dată de către Rice în anul 1968 [245]. Se consideră o placă fisurată, confecționată dintr-un material elastic, încărcată cu un sistem de sarcini aplicate la distanță relativ mare de fisură. Bilanțul energetic care se stabilește în acest caz este următorul [61]:

$$W = W_0 + \Delta W_e + \Delta W_\gamma - L \quad (4.5)$$

în care:

- W - energia totală pe unitatea de grosime a plăcii;
- W_0 - cantitatea cu care se modifică energia de deformare elastică atunci când are loc propagarea fisurii;
- ΔW_γ - cantitatea cu care se modifică energia superficială liberă ca urmare a formării noilor suprafețe ale fisurii;
- L - lucrul mecanic efectuat de forțele exterioare.

Relația (4.5) a fost stabilită în cazul comportării linear-elastice. Totuși, cu anumite restricții ea poate fi utilizată și la definirea comportării elastice neliniare ce constituie un model de analiză pentru studiul în domeniul elasto-plastic. Principala restricție este aceea de a nu se accepta producerea nici unei descărcări, în nici o parte a corpului, care poate apărea la comportarea plastică, deoarece deformările sunt parțial ireversibile. Așadar, integrala J, așa cum a fost definită inițial de către Rice, permite analiza extinderii fisurii în cursul unei încărcări lente, deci la începutul creșterii acesteia, și nu poate fi aplicată în condițiile unor solicitări ciclice care conțin și faza descărcării.

Dacă se notează cu W_p energia potențială a sistemului, vom avea:

$$W_p = W_0 + \Delta W_e - L \quad (4.6)$$

iar ecuația bilanțului energetic devine:

$$W = W_p + \Delta W_\gamma \quad (4.7)$$

Instabilitatea în propagarea unei fisuri, care străbate o grosime egală cu unitatea, se produce, așa cum s-a văzut, dacă este satisfăcută condiția:

$$\frac{d}{da}(L - \Delta W_e) \geq \frac{d(\Delta W_\gamma)}{da} \quad (4.8)$$

În cazul comportării elastice neliniare, echivalentul lui G din domeniul liniar elastic devine J , astfel:

$$J = \frac{d}{da}(L - \Delta W_e) \quad (4.9)$$

Conform definiției de mai sus, integrala J reprezintă energia disponibilă pe unitatea de suprafață a fisurii în extensie [23]. În condițiile unei comportări elastice avem egalitatea: $G=J$. Dacă rezerva de energie elastică W_0 din sistem este nulă, din relația (4.6) va rezulta:

$$W_p = \Delta W_e - L \quad (4.10)$$

și ca urmare:

$$J = -\frac{dW_p}{da} \quad (4.11)$$

Considerăm o placă cu grosimea unitară, sollicitată elastic în modurile I și II ($u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ și $u_3 = 0$), care conține o fisură centrală, *figura 4.3*.

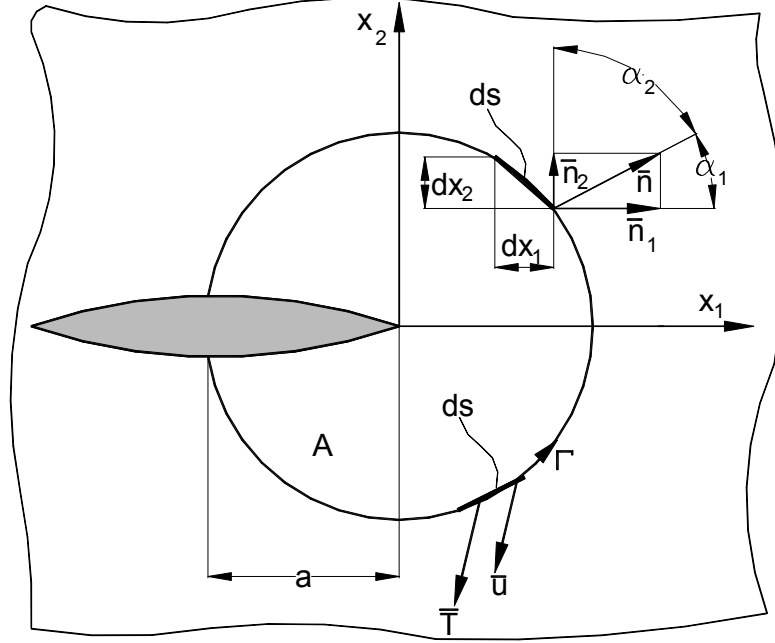


Fig. 4.3. Conturul pentru integrala J

Fie un contur Γ din vecinătatea fisurii cu normala exterioară \bar{n} și care delimitează suprafața de arie A . Energia potențială înmagazinată în zona delimitată de acest contur este dată de relația:

$$W_p = \iint_A w d_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \bar{T} u ds \quad (4.12)$$

În această relație w reprezintă energia specifică de deformare definită sub forma:

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (4.13)$$

în care ε_{ij} reprezintă tensorul deformațiilor specifice definit în fiecare punct din plan, iar σ_{ij} este tensorul tensiunilor.

\bar{T} reprezintă vectorul tracțiune într-un punct de pe contur și care se definește astfel:

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

Mărimea \bar{u} din expresia lui W_p reprezintă vectorul deplasare într-un punct de pe conturul Γ . Dacă fisura se extinde cu da , atunci energia potențială de deformare se diminuează cu cantitatea:

$$\frac{dW_p}{da} = \iint_A \frac{\partial w}{\partial a} dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial a} ds \quad (4.14)$$

În condițiile conturului Γ din *figura 4.3* sunt evidente următoarele relații:

$$da = -dx_1, \text{ respectiv } \frac{d}{da} = -\frac{d}{dx_1}$$

Pe baza celor de mai sus, variația energiei potențiale devine:

$$\frac{dW_p}{da} = -\iint_A \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma} \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} ds \quad (4.15)$$

Se face apel, în continuare, la teorema Gauss-Green care exprimă integrala de-a lungul unui contur în funcție de integrala dublă în raport cu aria inclusă de acel contur:

$$\int_{\Gamma} (R dx_1 + Q dx_2) = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial R}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (4.16)$$

în care:

$$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} Q(x_1, x_2) dx_2 \quad (4.17)$$

$$\iint_A \frac{\partial R}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = -\int_{\Gamma} R(x_1, x_2) dx_1 \quad (4.18)$$

Având în vedere aceste ultime expresii, integrala dublă din *relația (4.15)* devine:

$$\iint_A \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} w dx_2 \quad (4.19)$$

În aceste condiții, variația energiei potențiale capătă forma:

$$\frac{dW_p}{da} = -\int_{\Gamma} w dx_2 + \int_{\Gamma} \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} ds \quad (4.20)$$

Dacă avem în vedere definiția integralei J dată de *relația (4.11)*, se obține expresia finală a acesteia:

$$J = \int_{\Gamma} w dx_2 - \int_{\Gamma} \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} ds \quad (4.21)$$

sau scrisă tensorial:

$$J = \int_{\Gamma} w dx_2 - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \quad (4.22)$$

4.2.2. Independența integralei J în funcție de conturul Γ

Mai întâi se va demonstra că integrala J pe un contur închis este nulă. Considerăm conturul închis Γ din *figura 4.4* cu vectorii de tracțiune \bar{T} și deplasare \bar{u} .

Se pornește de la expresia integralei J dată de *relația (4.22)*. În baza teoremei Gauss-Green (*relația 4.17*), primul termen al expresiei (*4.22*) devine:

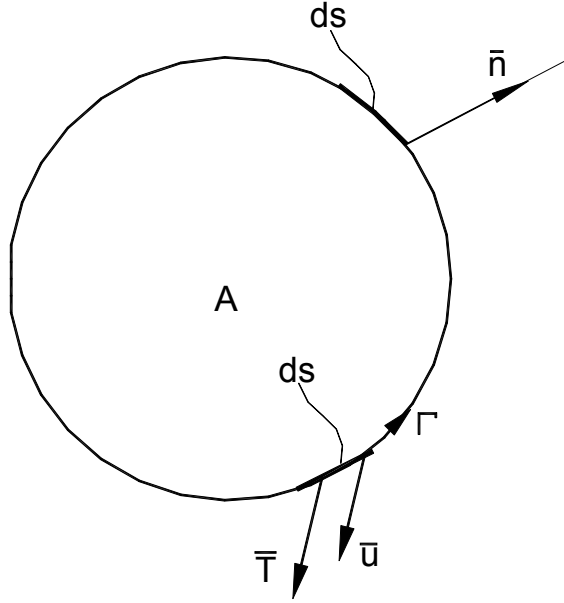
$$\int_{\Gamma} w dx_2 = \iint_A \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \quad (4.23)$$

Energia specifică de deformare w poate fi scrisă sub forma:

$$w = \sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{21} \varepsilon_{21} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} = \sigma_{11} \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} \quad (4.24)$$

În aceste condiții se obține:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \sigma_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} + 2\sigma_{12} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} \quad (4.25)$$

Fig. 4.4. Conturul Γ închis

Dacă se iau în considerație și relațiile diferențiale dintre deplasări și deformațiile specifice:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (4.26)$$

se va obține:

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right); \quad 2 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right); \quad \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \quad (4.27)$$

Dacă avem în vedere relațiile (4.27), expresia lui $\frac{\partial w}{\partial x_1}$ dată de relația (4.25) capătă forma generală:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \right] dx_1 dx_2 \quad (4.28)$$

și ca urmare vom avea:

$$\int_{\Gamma} w dx_2 = \iint \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \iint_A \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \right] dx_1 dx_2 \quad (4.29)$$

În mod analog se va analiza și cel de-al doilea termen al relației (4.22). Componentele vectorului tracțiune T_i sunt:

$$\begin{aligned} T_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 \\ T_2 &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

În aceste condiții se obține:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds &= \int_{\Gamma} \left[(\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] ds = \\ &= \int_{\Gamma} \left(\sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) n_1 ds + \int_{\Gamma} \left(\sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) n_2 ds \end{aligned} \quad (4.31)$$

Din figura 4.4 se observă că:

$$n_1 ds = ds \cos \alpha_1 = dx_2$$

$$n_2 ds = -ds \cos \alpha_2 = -dx_1$$

Ca urmare, relația (4.31) capătă forma:

$$\int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds = \int_{\Gamma} \left(\sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx_2 - \int_{\Gamma} \left(\sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx_1 \quad (4.32)$$

Tinând cont de relațiile (4.17) și (4.18), expresia dată de (4.32) se va transforma astfel:

$$\int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds = \iint_A \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 + \iint_A \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 \quad (4.33)$$

sau sub forma generală:

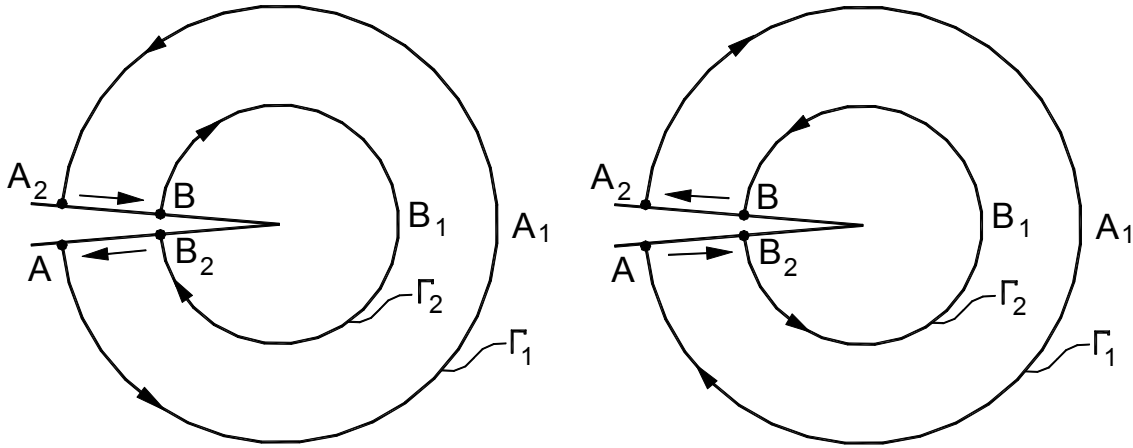
$$\int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds = \iint_A \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 \quad (4.34)$$

Introducând relațiile (4.34) și (4.29) în expresia generală a integralei J dată de relația (4.22), va rezulta:

$$J = \int_{\Gamma} w dx_2 - \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds = 0 \quad (4.35)$$

de unde rezultă faptul că integrala J pe un contur închis este nulă.

Pentru a demonstra invarianța integralei J în funcție de conturul ales considerăm conturul închis $AA_1A_2BB_1B_2$, care include contururile Γ_1 și Γ_2 și două porțiuni aparținând flancurilor fisurii, respectiv A_2B și AB_2 , figura 4.5a.



a)

b)

Fig. 4.5. Invarianța integralei J în raport cu curba Γ

Conform celor arătate mai sus se poate scrie:

$$J = J_{\Gamma_1} + J_{A_2B} + J_{\Gamma_2} + J_{B_2A} \quad (4.36)$$

iar dacă avem în vedere faptul că în lungul flancurilor fisurii $dx_2 = 0$ și vectorul tracțiune $T_i = 0$, relația (4.36) conduce la:

$$J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_2} = 0$$

sau

$$J_{\Gamma_1} = -J_{\Gamma_2}$$

Dacă vom schimba sensul de parcurgere de-a lungul conturului Γ_2 , figura 4.5b, va apare o schimbare de semn și ca urmare:

$$J_{\Gamma_1} = -J_{\Gamma_2} \quad (4.37)$$

Ca urmare, integrala J este independentă de conturul parcurs de la un flanc al fisurii la celălalt.

4.2.3. Expresiile integralei J pentru unele cazuri particulare

Rice [246] a prezentat un alt mod de definire a integralei J pe baza variației energiei potențiale între două stări ale aceluiași corp care diferă între ele prin lungimea fisurii. Au fost analizate cazurile când deplasarea rămâne constantă și respectiv forța rămâne constantă.

Considerăm cazul unui corp cu o fisură de lungime a care este solicitat de o forță F până când deplasarea atinge valoarea v , figura 4.6a.

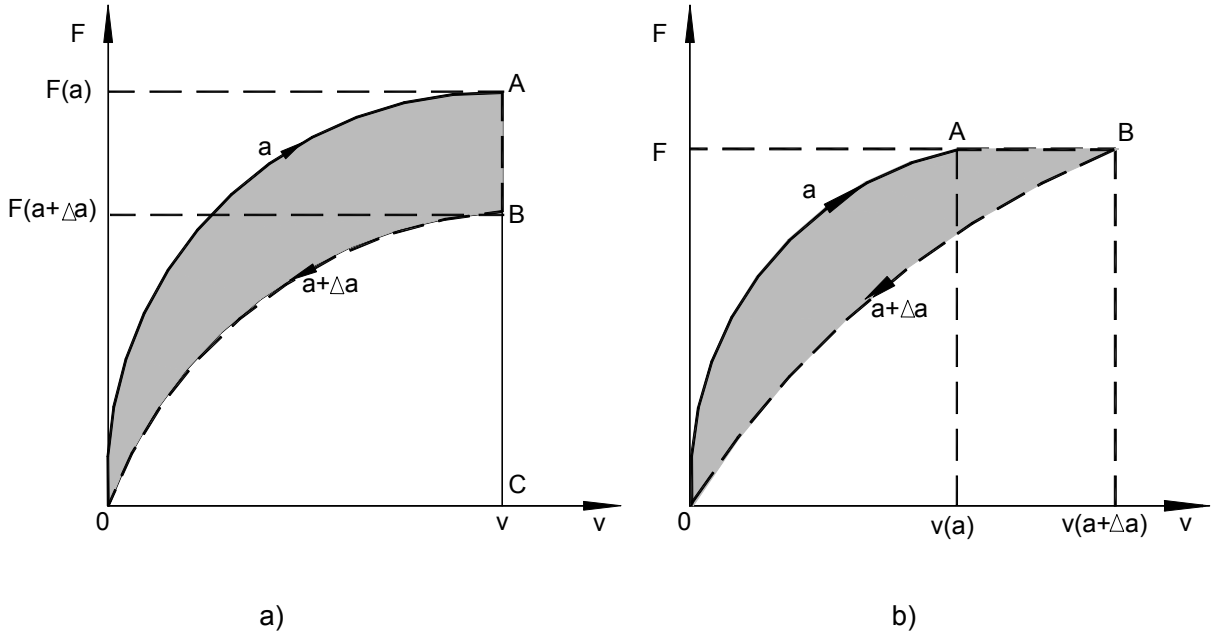


Fig. 4.6. Variația forței în raport cu deplasarea punctelor sale de aplicație

Energia potențială corespunzătoare acestei stări va fi:

$$W_p(a) = \int_0^v F(a)dv - L \quad (4.38)$$

Dacă fisura se extinde cu cantitatea Δa , energia potențială devine:

$$W_p(a + \Delta a) = \int_0^v F(a + \Delta a)dv - L \quad (4.39)$$

Lucrul mecanic L nu se modifică deoarece deplasarea v rămâne constantă, figura 4.6a. Variația energiei potențiale atunci când fisura se extinde cu cantitatea Δa va avea forma:

$$\Delta W_p = W_p(a + \Delta a) - W_p(a) = \int_0^v F(a + \Delta a)dv - \int_0^v F(a)dv = \int_0^v \Delta F dv \quad (4.40)$$

sau:

$$dW_p = \int_0^v dF dv \quad (4.41)$$

Dacă avem în vedere modul de definire a integralei J , *relația 4.11*, va rezulta:

$$J = -\frac{dW_p}{da} - \int_0^v \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right)_v dv \quad (4.42)$$

Procedând în mod analog se poate analiza și cazul când forța rămâne constantă, *figura 4.6b*. Energia potențială pentru starea inițială este dată de expresia:

$$W_p(a) = \int_0^v F(a)dv - L = \int_0^v F(a)dv - Fv \quad (4.43)$$

Folosind expresia integralei prin părți se obține:

$$\int_0^v F(a)dv = Fv - \int_0^F v(a)dF \quad (4.44)$$

Rezultă:

$$W_p(a) = -\int_0^F v(a)dF \quad (4.45)$$

Dacă fisura se extinde cu cantitatea Δa , energia potențială devine:

$$W_p(a + \Delta a) = \int_0^{v+dv} Fdv - F(v + dv) = -\int_0^F v(a + \Delta a)dF \quad (4.46)$$

Variația energiei potențiale în acest caz, când fisura se extinde cu cantitatea Δa , capătă forma:

$$\Delta W_p = W_p(a + \Delta a) - W_p(a) = -\int_0^F v(a + \Delta a)dF + \int_0^F v(a)dF = -\int_0^F \Delta v dF \quad (4.47)$$

sau:

$$dW_p = -\int_0^F dv dF \quad (4.48)$$

Dacă avem în vedere relația (4.11) se obține:

$$J = -\frac{dW_p}{da} = \int_0^F \left(\frac{\partial v}{\partial a} \right)_F dF \quad (4.49)$$

Ca urmare, expresia generală a integralei J , pentru cele două cazuri, va fi:

$$J = -\int_0^v \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right)_v dv = \int_0^F \left(\frac{\partial v}{\partial a} \right)_F dF \quad (4.50)$$

Relațiile de mai sus permit determinarea integralei J printr-o singură încercare, în cazul unei epruvete la care fisura are semilungimea a .

4.2.4. Particularități ale conceptului integralei J

Integrala J reprezintă variația energiei eliberate de un sistem elastic neliniar. În anumite condiții ea poate reprezenta și variația energiei elasto-plastice eliberate de sistem [66]. Pentru a se păstra independența funcției de contur a expresiei integrale J este necesar ca pe conturul respectiv să existe numai încărcări și deplasări elastice. Ca urmare, conturul de integrare trebuie să se aleagă *cât mai departe* de zonele plastice de la vârful fisurii. Numai așa variația energiei elasto-plastice eliberate poate fi obținută printr-un calcul elastic.

Este evident faptul că și integrala de contur J are o valoare critică J_c de la care se produce propagarea instabilă a fisurii. Prin analogie, aceasta corespunde valorii G_c din mecanica ruperilor elastice [114, 115]. Pentru o aplicare corectă a conceptului integralei J este necesar să se țină seama de următoarele observații:

1. În raționamentele făcute pentru deducerea expresiei integralei J s-a presupus că deformațiile elastice sunt neliniare deci ireversibile. Cum deformațiile plastice sunt ireversibile, energia disipată nu poate fi transformată în altă formă de energie recuperabilă. Considerarea acestor deformații la calculul integralei J face ca acest concept să nu poată fi acceptat deoarece rezultă $J \neq 0$.
2. Presupunerea că elasticitatea neliniară este compatibilă cu comportarea reală în absența oricăror descărcări este de asemenea discutabilă, deoarece, prin avansarea fisurii se produce descărcarea materialului la vârful acesteia. Ca urmare, integrala J este aplicabilă până în momentul în care începe extensia fisurii.
3. La obținerea integralei J , tensiunile și deplasările din material sunt parametri controlați. Limitarea analizei la cazul bidimensional presupune că nu se ține seama de efectul dat de deformațiile care se produc pe direcția grosimii materialului. Pentru ca integrala J să fie validă, trebuie ca aceste deformații să fie nule, condiție ce corespunde numai stării plane de deformare. Pentru scopuri practice, această restricție nu este importantă deoarece, de regulă, integrala J se folosește pentru evaluarea extensiei fisurii la piesele groase.
4. Dacă prin definiție se pune condiția $J=G$, atunci conceptul J este compatibil cu teoria liniar-elastică a mecanicii rupurilor. Prin analogie cu G , valoarea lui J se exprimă în J/m^2 sau N/m .
5. Pentru integrala J nu se cunosc soluții analitice decât pentru cazuri simple. În general, determinarea ei se face numeric, prin metoda elementelor finite sau a elementelor de frontieră.

Din punct de vedere fizic, cel mai important rol al integralei J este acela de măsură a intensității deformațiilor din vecinătatea vârfului fisurii.

Alegând conturul Γ de forma unui arc de cerc cu centrul în vârful fisurii, pe baza proprietăților de independență de drum, cercul ar putea fi micșorat până când se confundă cu vârful. În baza primei observații făcute mai înainte, pe acest ultim cerc integrala J este cu siguranță diferită de zero. Dacă J nu este zero, atunci ea trebuie să aibă o singularitate de forma r^{-1} , întrucât, la limită, când raza cercului r tinde spre zero, funcția de sub integrala de contur (4.34) se poate scrie:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[r \left(w_n - T \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] = f(\theta) \quad (4.51)$$

și în acest fel:

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \quad (4.52)$$

Pe de altă parte, această exprimare sugerează existența unei relații strânse între J și deformația de la vârful fisurii, care se poate determina dacă se cunoaște corelația dintre tensiuni și deformațiile specifice.

Hutchinson, Rice și Rosengren [115] au arătat că integrala J poate caracteriza starea de tensiune de la vârful fisurii într-un material elastic neliniar. Pentru studiu a fost aleasă o curbă caracteristică a materialului având ecuația:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (4.53)$$

unde σ_0 și ε_0 sunt coordonatele unui punct de referință, care poate fi chiar punctul în care se produce curgerea efectivă ($\sigma_0 = E \cdot \varepsilon_0$), α este o constantă adimensională iar n este exponentul de întărire. Valorile uzuale ale lui n sunt cuprinse între 3 și 5 pentru

materialele cu întărire puternică și până la 20 pentru cele cu întărire redusă. Relația (4.53) poate fi generalizată la starea de tensiune triaxială folosind invarianții tensiunii și deformației precum și componentele deviatorului deformației. Se observă că, în apropierea vârfului fisurii, termenul σ/σ_0 din relația (4.53) devine neglijabil în raport cu cel liniar. Astfel, rezultă că pentru w se obține o singularitate de forma r^{-1} , pentru tensiune una de forma $r^{-1/(n+1)}$ iar pentru deformațiile specifice o singularitate de forma $r^{n/(n+1)}$.

Integrala J poate fi considerată ca o măsură a intensității câmpului singular de la vârful fisurii. Totuși, trebuie avută în vedere regula că, înainte de a presupune că integrala J poate fi folosită la evaluarea sarcinilor și a dimensiunilor defectelor la care se produce inițierea creșterii fisurii într-un solid elasto-plastic real, este necesar să se verifice dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

- teoria deformației plastice (din teoria plasticității) să poată modela corect comportarea materialului real elasto-plastic în prezența deformațiilor mici produse de o încărcare monotonică;
- zonele în care efectele deformațiilor finite sunt importante și cele în care se produc procese microscopice să fie cuprinse în aria de valabilitate a soluției câmpului singular din jurul vârfului fisurii, care este bazată pe teoria micilor deformații plastice.

Condiția a doua se numește *dominanță J* și amintește de condițiile impuse zonelor plastice cuprinse în zona dominată de singularitatea de la vârful fisurii, descrisă cu ajutorul factorului K .

Deși, în general, integrala J este independentă de contur, atunci când se utilizează pentru calcul metoda elementelor finite, pornind de la o soluție stabilită pe baza teoriei incrementale a plasticității, această independență este aproximativă. Cu toate acestea, folosirea unei soluții bazate pe teoria deformației plastice este în general acceptată pentru calculul integralei J în cazul fisurilor existente în structuri solicitate monotonic.

4.2.5. Relații simplificate pentru determinarea integralei J

Constatând că integrala J este o măsură a forței de extensie a fisurii G și generalizând definiția dată acesteia pentru materialele linear-elastice, se poate afirma că J depinde numai de starea de deformație curentă a corpului fisurat. Rezultă că integrala J este dependentă de complianța mecanică C_m la încărcarea sistemului. În consecință, integrala J se poate obține din condiția $C_m \rightarrow \infty$, dacă în timpul avansării incrementale a fisurii sarcinile sunt constante, sau din condiția $C_m = 0$, dacă deplasările sunt constante. Utilizarea acestor condiții permite determinarea valorii integralei J direct din înregistrarea forță-deplasare, ceea ce conduce la o simplificare deosebită, în special pentru solicitările la încovoiere pură. Dacă se notează cu M momentul pe unitatea de grosime și cu Ω diferența dintre rotirea relativă a secțiunilor de capăt ale epruvetei și rotirea produsă în absența fisurii, atunci:

$$J = \frac{2}{b} \int_0^a M d\Omega \quad (4.54)$$

unde b este lungimea porțiunii rămase nefisurată. Formula dă rezultate corecte numai dacă fisura s-a propagat cel puțin pe 50% din lățimea epruvetei.

Cu toate că obținerea relației de calcul a integralei J este o problemă dificil de rezolvat, se cunosc expresiile acestei mărimi pentru câteva cazuri particulare. Aceste soluții se bazează pe utilizarea teoriei deformațiilor plastice mici în zona vârfului fisurii. Dacă se notează cu P parametrul de încărcare și se consideră valabilă relația (4.53), atunci tensiunile și deformațiile sunt proporționale cu P și, respectiv, P^n iar J este proporțională cu P^{n+1} . Mai mult, componentele tensiunii dintr-un punct cresc proporțional cu P , ca urmare a criteriului de curgere ales. La limită, aceste componente tind spre valorile obținute pentru corpul perfect plastic ($n \rightarrow \infty$), sarcina P_0 corespunzătoare acestei situații putând fi considerată ca o valoare de referință. O soluție tipică pentru dependența (4.53), fără primul termen, este:

$$\frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 a} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{n+1} \cdot h$$

în care h depinde de geometrie și de n .

4.3. Curbe de rezistență la creșterea fisurii în domeniul elasto-plastic

S-a văzut în capitolul anterior că, la materialele cu comportare liniar-elastică propagarea unei fisuri este stabilă dacă sunt îndeplinite condițiile:

$$G=R \text{ și } \frac{\partial G}{\partial a} \leq \frac{dR}{da}$$

Pentru materialele cu comportament neliniar, rolul forței de extensie a fisurii G este luat de parametrul J și în mod similar, rezistența materialului la extensia fisurii va fi J_R care corespunde parametrului R de la materialele cu comportament liniar. În consecință, la materialele cu comportament neliniar criteriul de rupere este $J=J_R$.

Intrucât plasticitatea nu afectează valabilitatea conservării energiei, în cazul în care un material este solicitat parțial elastic și parțial plastic, criteriul de rupere rămâne același ($J=J_R$) cu deosebirea că mărimea J reprezintă suma a două componente, una corespunzând solicitării elastice și alta celei plastice. În consecință, indiferent de forma curbei $\sigma-\varepsilon$ sau de prezența ori absența comportării plastice, criteriul de rupere este dat de egalitatea $J=J_R$. Dacă $J < J_R$ ruperea nu se produce, iar dacă $J > J_R$ ea nu se oprește până când nu parcurge întreaga secțiune a piesei [61].

La materialele neliniare sau care conțin zone plastice pe arii extinse, singura problemă care se pune este aceea a validității parametrului J , adică a posibilității de a fi utilizat ca unic parametru pentru evaluarea câmpului de tensiuni și deformații de la vârful fisurii. Acest câmp de tensiuni este unul singular, la care singularitatea de la vârful fisurii este înconjurată de mai multe zone concentrice în care materialul se comportă în mod diferit datorită diverselor procese care se produc acolo. De aceea, problema validității integralei J se pune atât pentru piesa ce urmează a fi proiectată cât și pentru determinările experimentale care se fac cu scopul caracterizării materialului.

4.4. Mărimea zonei plastice de la vârful fisurii în acord cu modelul Irwin

Considerăm o fisură de lungime $2a$ într-o placă plană supusă la tracțiune (*modul I*) și aflată într-o *stare plană de tensiuni*. Se ia ca origine vârful fisurii reale, *figura 4.7*. Tensiunea elastică σ_y după axa (oy) este dată de relația:

$$\sigma_y = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (4.55)$$

Relația (4.55) arată că tensiunea σ_y devine infinită atunci când $x \rightarrow 0$ (vârful fisurii). Într-un material real acest lucru nu se poate întâmpla. Prin substituirea rezistenței la curgere σ_c în locul lui σ_y din ecuația (4.55) se poate obține o estimare pentru distanța r_y în care materialul este deformat plastic înaintea vârfului fisurii:

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_c} \right)^2 \quad (4.56)$$

Presupunând, într-o primă aproximare, că mărimea zonei plastice r_y în lungul axei x corespunde cu diametrul zonei plastice circulare, distribuția tensiunii σ_y în fața vârfului fisurii va fi ca cea prezentată în *figura 4.7*, [140]. Din această figură rezultă că presupunerea făcută nu are cea mai bună acuratețe datorită faptului că o anumită parte a distribuției tensiunilor (partea hașurată) este pur și simplu tăiată în partea de deasupra valorii σ_c .

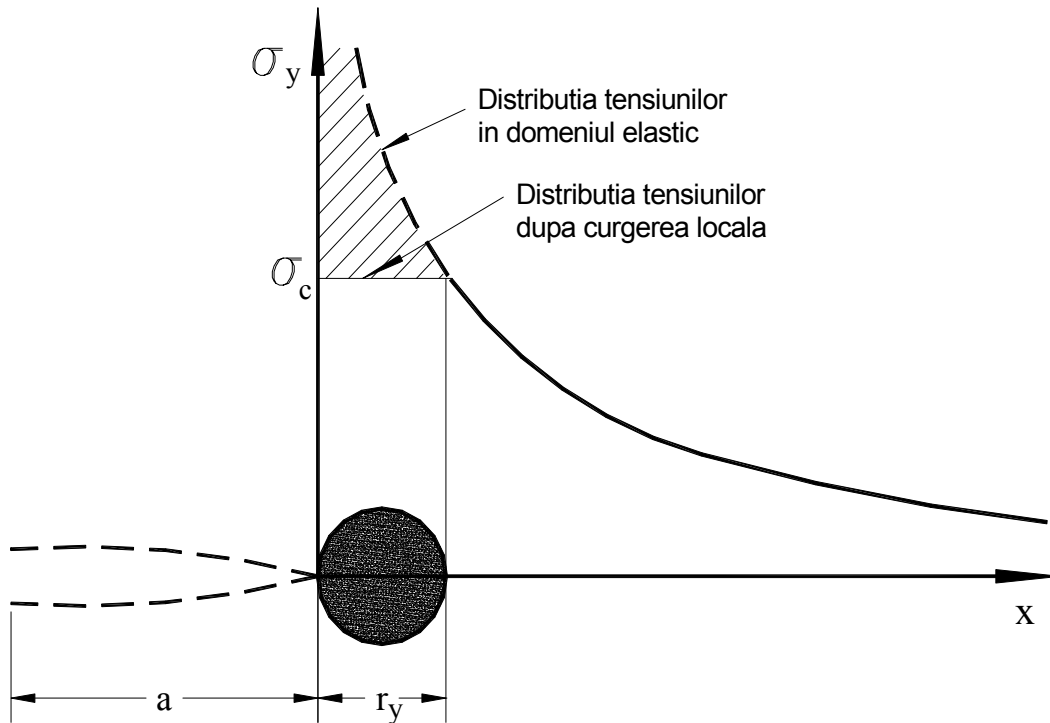


Fig. 4.7. O primă aproximare a zonei plastice de la vârful fisurii

Modelele cele mai cunoscute din literatura de specialitate în legătură cu forma și dimensiunea zonei deformat plastic de la vârful fisurii au urmat unul sau două concepte. Fiecare dintre acestea au avut ca rezultat o bună aproximare a dimensiunii zonei plastice cum sunt cele prezentate de Irwin și Dugdale ce vor fi prezentate în continuare în cadrul acestui capitol. S-a constatat experimental că zona deformată plastic este influențată de faptul că materialul este supus, fie stării plane de tensiuni fie stării plane de deformare. Este cunoscut faptul că, în condițiile stării plane de deformare curgerea nu va apărea până când tensiunea aplicată nu depășește valoarea limitei la curgere σ_c , zona plastică având în acest caz o dimensiune relativ mică.

Analiza lui Irwin asupra mărimii zonei plastice, [130], încearcă să justifice faptul că distribuția tensiunilor elastice σ_y dată de relația (4.1) nu poate fi pur și simplu tăiată mai sus de valoarea limitei de curgere σ_c . Pentru ca analiza să fie pertinentă se impun câteva restricții:

- 1) Forma zonei plastice se consideră a fi circulară;
- 2) Este analizată mărimea zonei plastice numai în lungul axei x ($\theta=0$ în relațiile 3.68);
- 3) Comportamentul materialului este considerat a fi, din punct de vedere macroscopic, perfect-elastic, presupunând aici că, în afară de zona de la vârful fisurii, nu mai apar și alte zone deformat plastic;
- 4) Se consideră că avem o stare plană de tensiuni.

Comportarea materialului conform restricției 3, implică faptul că tensiunile nu vor depăși limita de curgere σ_c .

Irwin introduce noțiunea de fisură fictivă presupunând că apariția plasticității la vârful fisurii face ca aceasta să devină mai mare decât mărimea sa fizică – deplasările sunt mai mari și rigiditățile mai mici decât în cazul elastic:

$$a_{ef} = a + \Delta a_n$$

unde a_{ef} este lungimea efectivă a fisurii fictive, iar Δa_n valoarea adăugată fisurii reale. Această valoare adăugată se justifică prin redistribuirea tensiunilor care se găsesc deasupra valorii limitei de curgere în cazul elastic. În aceste condiții Δa_n devine o parte a fisurii, iar tensiunea σ_y este egală cu limita de curgere σ_c .

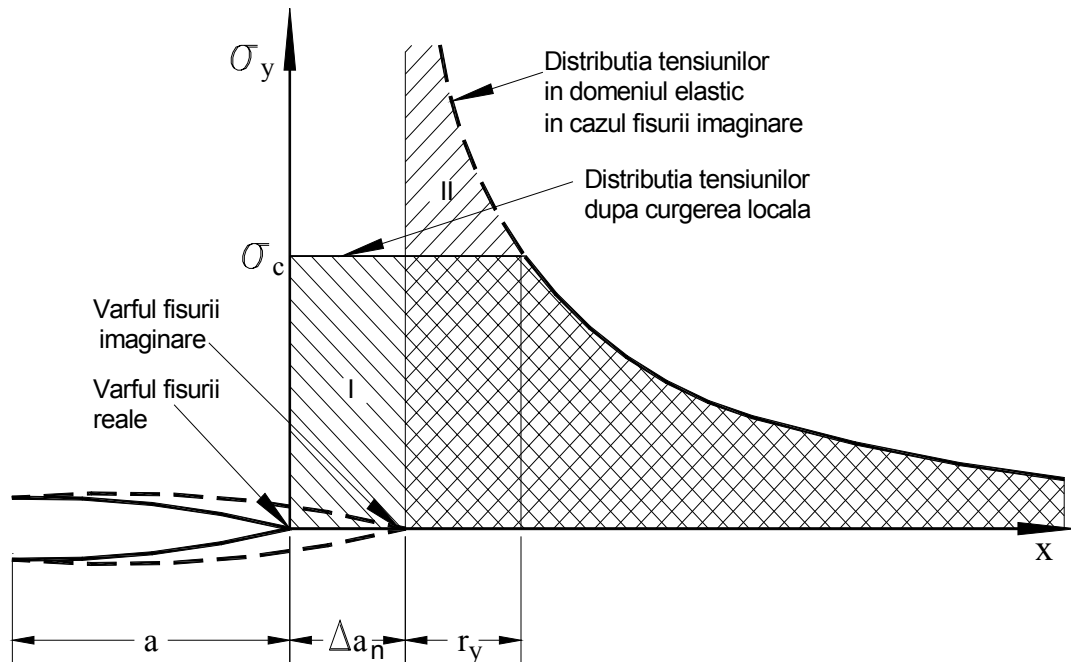


Fig. 4.8. Schematizarea analizei Irwin

În figura 4.8 este prezentată distribuția tensiunii σ_y care derivă din soluția elastică pentru lungimea fisurii ($a + \Delta a_n$) ca și actuala distribuție σ_y , după curgerea plastică locală. Ca urmare, noul profil al tensiunii va fi:

- $\sigma_y = \sigma_c$ pentru $0 < x < \Delta a_n + r_y$;
- $\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}}$ pentru $x > \Delta a_n + r_y$.

Energiile dezvoltate de aceste două distribuții trebuie să fie egale. Acest lucru se va întâmpla dacă aria din zona I va fi egală cu aria din zona II.

Astfel vom avea:

$$\sigma_c \cdot \Delta a_n = \int_0^{r_y} \frac{\sigma \sqrt{\pi(a + \Delta a_n)}}{\sqrt{2\pi r}} dr - \sigma_c \cdot r_y \quad (4.57)$$

sau:

$$\sigma_c (\Delta a_n + r_y) = \int_0^{r_y} \frac{\sigma \sqrt{\pi(a + \Delta a_n)}}{\sqrt{2\pi}} \frac{dr}{\sqrt{r}} = \frac{2\sigma \sqrt{(a + \Delta a_n)}}{\sqrt{2}} \sqrt{r_y} \quad (4.58)$$

Pentru lungimea fisurii (fictive) $a + \Delta a_n$ vom avea:

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_c} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{2\sigma_c^2} (a + \Delta a_n) \quad (4.59)$$

Substituind de aici $\sigma(a + \Delta a_n)$ în ecuația (4.58) va rezulta:

$$\sigma_c (\Delta a_n + r_y) = \frac{2\sigma_c \sqrt{2r_y} \sqrt{r_y}}{\sqrt{2}}$$

și ca urmare vom avea:

$$\Delta a_n + r_y = 2r_y$$

A rezultat faptul că, valoarea care se adaugă la fisura reală, Δa_n , este egală, într-o primă aproximare, cu mărimea zonei plastice r_y .

Din analiza lui Irwin rezultă că diametrul zonei plastice ($\Delta a_n + r_y$) este egal cu $2r_y$. Acest rezultat arată că vârful fisurii fictive ($a + \Delta a_n$) se plasează în centrul zonei plastice circulare, *figura 4.9*. Distribuția tensiunilor la distanța $x > r_y$ este dată de variația

tensiunilor elastice $\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}}$.

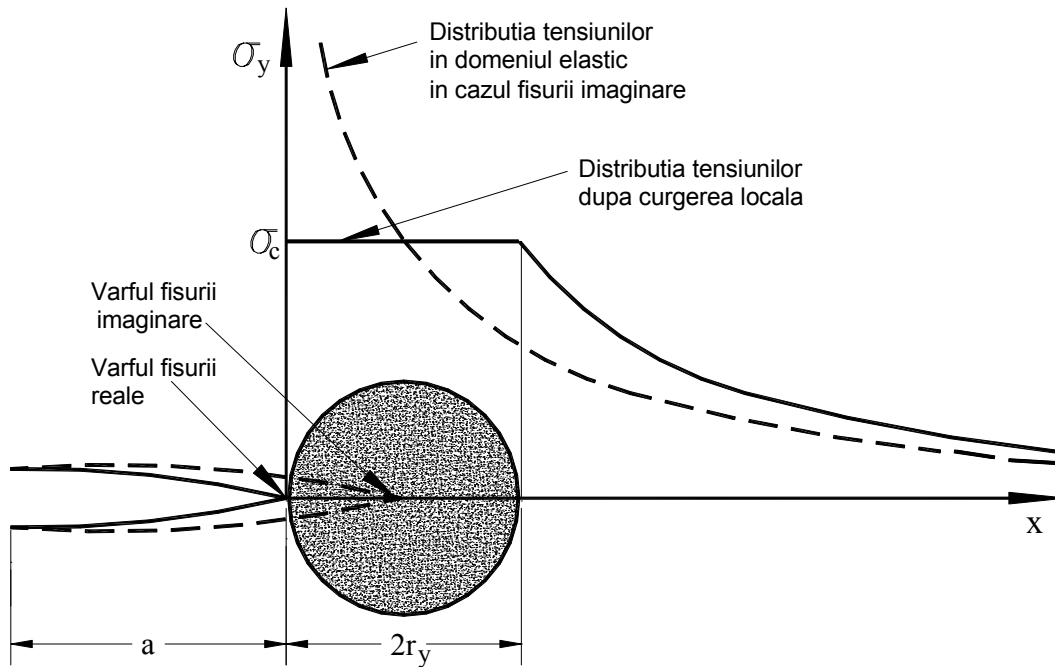


Fig. 4.9. Mărima zonei plastice dată de Irwin

Se constată faptul că, valoarea lui K_I determină atât mărimea zonei plastice, ecuația (4.56), cât și tensiunile și deformațiile în afara acesteia. Ca urmare, conceptul de intensitate a tensiunilor se aplică atât pentru determinarea modului în care are loc propagarea fisurii cât și pentru stabilirea comportării la fisurare a materialului.

Expresia utilizată, într-o primă aproximare, pentru factorul de intensitate a tensiunii în cazul fisurii fictive este:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi(a+r_y)}$$

iar cea pentru mărimea zonei deformate plastic:

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_c} \right)^2$$

care implică faptul că r_y și K_I sunt interdependente.

Pentru acest caz simplu, pentru care se consideră $f(a/w)=1$, problema poate fi rezolvată analitic prin substituție simplă. Va rezulta:

$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_c} \right)^2\right)}} \quad (4.60)$$

expresie care se apropie de cea uzuală ($K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$) pentru $\sigma \ll \sigma_c$.

În secțiunea 3.2 a fost definită deplasarea v a flancurilor fisurii. Expresia obținută pentru starea plană de tensiune a fost $v = \frac{2\sigma}{E} \sqrt{a^2 - x^2}$. Deplasarea totală δ_t la deschiderea fisurii este egală cu $2v$, figura 4.10.

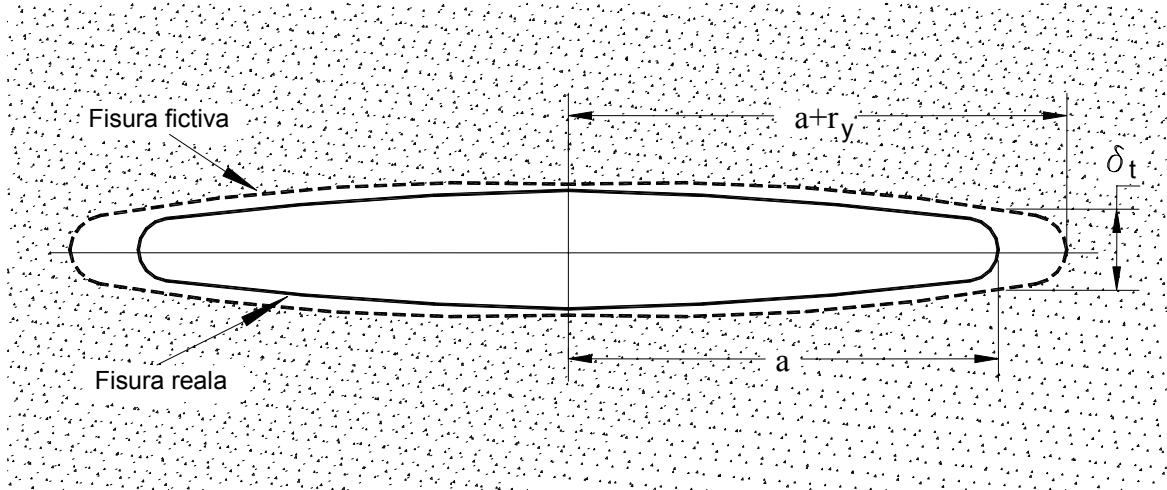


Fig. 4.10. Deplasarea la deschiderea vârfului fisurii (CTOD)

Având în vedere lungimea semifisurii fictive, $(a+r_y)$ și considerând deplasarea la deschiderea fisurii ca fiind cea de la vârful fisurii actuale, vom avea următoarea expresie pentru deplasarea la deschiderea fisurii:

$$\delta_t = \frac{4\sigma}{E} \sqrt{a^2 + 2ar_y + r_y^2 - a^2} \approx \frac{4\sigma}{E} \sqrt{2ar_y}$$

Substituind pe r_y din relația (4.56) vom avea:

$$\delta_t = \frac{4}{\pi} \frac{K_I}{E \sigma_c} \quad (4.61)$$

care dă o valoare aproximativă pentru deplasarea la deschiderea vârfului fisurii. Ecuația (4.61) nu poate fi utilizată pentru situația în care K_I variază, de exemplu în cazul solicitării de oboseală.

Presupunând că vrem să determinăm δ_t pentru o valoare $K_I < K_{\max}$, vom avea:

$$\delta_t = \frac{4}{\pi} \frac{K_I K_{\max}}{E \sigma_c}$$

4.5. Mărimea zonei plastice în acord cu modelul Dugdale. Modelul benzilor de alunecare

Analiza Dugdale, [60] presupune că toate deformările plastice sunt concentrate în zona din frontul fisurii, așa-numitul model al benzilor de alunecare. Acest tip de comportare apare la numeroase materiale. Pe baza analizei lui Irwin, Dugdale arată că lungimea fisurii efective este mai mare decât lungimea fisurii fizice. Creșterea Δa_n a fisurii fictive se consideră că se datorează faptului că se atinge la vârful fisurii tensiunea de curgere a materialului, *figura 4.11*.

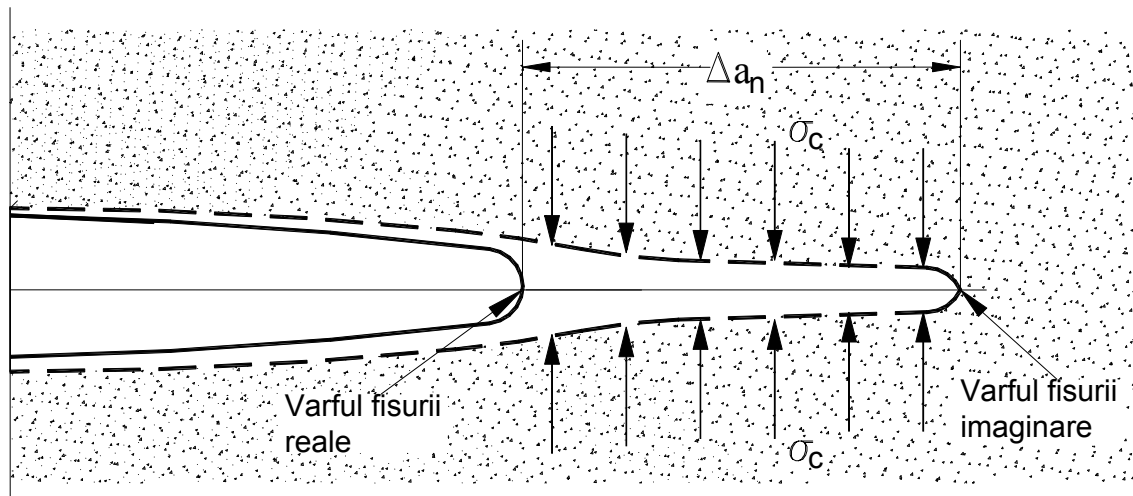


Fig. 4.11. Schematizarea analizei Dugdale

În demonstrațiile ce vor urma Δa_n reprezintă mărimea întregii zone plastice. Determinarea de către Dugdale a acestei mărimi s-a făcut în două moduri:

- în mod direct utilizând metoda suprapunerii efectelor;
- în mod indirect utilizând funcțiile de tensiune.

4.5.1. Determinarea mărimii zonei plastice utilizând metoda suprapunerii efectelor

Acest procedeu este prezentat în *figura 4.12*.

Într-o placă cu o fisură de lungime fizică $2a$ și mărimea zonei plastice $2\Delta a_n$ (*figura 4.12a*) se stabilesc aceleași tensiuni și deformări ca și într-o placă în care lungimea fizică a fisurii este $2(a+\Delta a_n)$ și în care zonele de mărime Δa_n sunt supuse unor tensiuni având valoarea σ_c (*figura 4.12b*).

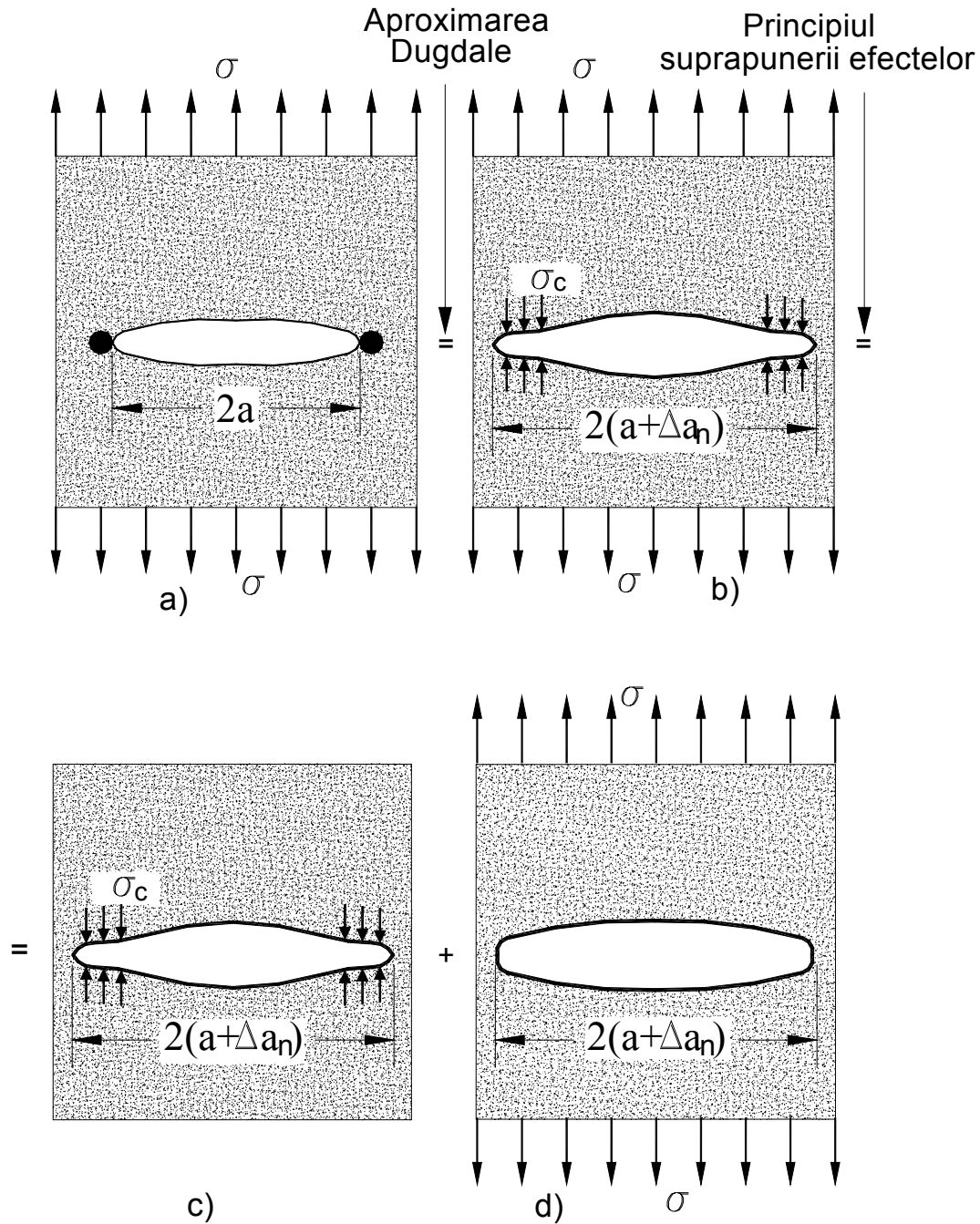


Fig. 4.12 Obținerea relației Dugdale pe baza principiului suprapunerii efectelor

Cele două solicitări (în modul I) ce acționează asupra plăcii din *figura 4.12b* pot fi separate în solicitările din plăcile figurate în *4.12 b* și *c*. În aceste condiții se constată că, la vârful fisurii fictive se stabilește o valoare finită a tensiunii σ_y , respectiv σ_c . Cu alte cuvinte, $\sigma_y = \frac{K_I^{sum}}{\sqrt{2\pi r}}$ este finit, unde $K_I^{sum} = K_I^B = K_I^C + K_I^D$. Pentru $r=0$, la vârful fisurii

imaginare σ_y trebuie să devină singulară, cu excepția punctului în care $K_I^{sum} = 0$. Având în vedere cele enunțate, valoarea lui Δa_n poate fi determinată conform modelului prezentat în continuare. K_I^C poate fi determinat cu ajutorul expresiei (4.56), având în vedere modul de încărcare a frontului fisurii:

$$K_I^C = \frac{P}{\sqrt{\pi(a + \Delta a_n)}} \int_a^{a + \Delta a_n} \frac{2(a + \Delta a_n)dx}{\sqrt{(a + \Delta a_n)^2 - x^2}} = \frac{2P(a + \Delta a_n)}{\sqrt{\pi(a + \Delta a_n)}} \left[\arcsin \frac{x}{a + \Delta a_n} \right]_a^{a + \Delta a_n}$$

$$\Rightarrow K_I^C = -2\sigma_{ys} \sqrt{\frac{a + \Delta a_n}{\pi}} \arccos \frac{a}{a + \Delta a_n} \quad (4.62)$$

în care $P = -\sigma_c$.

K_I^D va avea următoarea formă:

$$K_I^D = \sigma \sqrt{\pi(a + \Delta a_n)} \quad (4.63)$$

Dacă vom considera că $K_I^{sum} = K_I^B = K_I^C + K_I^D = 0$, vom găsi:

$$\cos \frac{\pi\sigma}{2\sigma_c} = \frac{a}{a + \Delta a_n} \quad \text{sau} \quad \sec \frac{\pi\sigma}{2\sigma_c} = \frac{1}{\cos \frac{\pi\sigma}{2\sigma_c}} = 1 + \frac{\Delta a_n}{a} \quad (4.64)$$

Utilizând dezvoltarea în serie: $\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \dots$ pentru $|x| < \frac{\pi}{2}$

și presupunând că $\sigma \ll \sigma_c$, $x = \frac{\pi\sigma}{2\sigma_c} \ll \frac{\pi}{2}$, se pot lua în considerare numai primii doi termeni ai seriei și vom avea:

$$\Delta a_n = \frac{\pi^2 \sigma^2 a}{8\sigma_c^2} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I}{\sigma_c} \right)^2$$

De notat că nu putem găsi tensiunea $\sigma_y (= \sigma_c)$ la vârful fisurii făcând derivarea în relația de mai sus pentru că $\sigma_y = \frac{K_I^{sum}}{\sqrt{2\pi r}}$ tinde să devină nedefinită atunci când $r \rightarrow 0$.

Se cunoaște faptul că σ_y are o valoare finită.

Pentru determinarea mărimii zonei plastice de la vârful fisurii utilizând funcțiile de tensiuni trebuie făcuți următorii pași:

- 1). Obținerea unei funcții de tensiune de tip Westergaard pentru lungimea fisurii $2(a + \Delta a_n)$ cu originea în centrul fisurii. Funcția corespunzătoare este:

$$\Phi_1(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{(a + \Delta a_n)^2}{z^2}}}$$

2). Intrucât Δa_n conține tensiunea de curgere, spre deosebire de cazul fisurii reale, funcția de tensiune elastică $\Phi_1(z)$ va supraestima intensitatea tensiunilor la vârful fisurii fictive. Pentru a obține estimarea corectă se utilizează și aici principiul suprapunerii efectelor. Astfel, trebuie determinată funcția de tensiune care descrie condițiile de încărcare pe distanța Δa_n , având în vedere faptul că această funcție de tensiune face parte din $\Phi_1(z)$.

3). Se cunoaște faptul că funcția de tensiune $\Phi_2(z)$, corespunzătoare forțelor P (pe unitatea de grosime) aplicate pe ambele flancuri ale fisurii la distanțele $+b$ și $-b$ față de centrul fisurii, este dată de relația:

$$\Phi_2(z) = \frac{2Pz\sqrt{(a + \Delta a_n)^2 - b^2}}{\pi\sqrt{z^2 - (a + \Delta a_n)^2}(z^2 - b^2)} \quad (4.65)$$

Inlocuind forța P care corespunde tensiunii de curgere $P = \sigma_c \cdot db$ și prin integrarea $\Phi_2(z)$ se obține funcția de tensiune $\Phi_3(z)$ care descrie condițiile de încărcare pe zona Δa_n :

$$\begin{aligned} \Phi_3(z) &= \int_a^{a+\Delta a_n} \frac{2\sigma_c z}{\pi \sqrt{z^2 - (a + \Delta a_n)^2}} \frac{\sqrt{(a + \Delta a_n)^2 - b^2}}{z^2 - b^2} db = \\ &= \frac{2\sigma_c}{\pi} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 - (a + \Delta a_n)^2}} \arccos \frac{a}{a + \Delta a_n} \right] - \frac{2\sigma_{ys}}{\pi} \operatorname{arccctg} \left[\frac{a}{z} \sqrt{\frac{z^2 - (a + \Delta a_n)^2}{(a + \Delta a_n)^2 - a^2}} \right] \end{aligned} \quad (4.66)$$

4). Funcția de tensiune corectată va fi: $\Phi_4(z) = \Phi_1(z) - \Phi_3(z)$ și va rezulta:

$$\begin{aligned} \Phi_4(z) &= \frac{\sigma \cdot z}{\sqrt{z^2 - (a + \Delta a_n)^2}} - \frac{2\sigma_c}{\pi} \frac{z}{\sqrt{z^2 - (a + \Delta a_n)^2}} \arccos \frac{a}{a + \Delta a_n} + \\ &+ \frac{2\sigma_c}{\pi} \operatorname{arccctg} \left[\frac{a}{z} \sqrt{\frac{z^2 - (a + \Delta a_n)^2}{(a + \Delta a_n)^2 - a^2}} \right] \end{aligned} \quad (4.67)$$

5). Dugdale presupune că nu poate exista o singularitate la vârful fisurii fictive și ca urmare termenul singular din ecuația (4.67) trebuie să dispară:

$$\frac{\sigma \cdot z}{\sqrt{z^2 - (a + \Delta a_n)^2}} - \frac{2\sigma_{ys}}{\pi} \frac{z}{\sqrt{z^2 - (a + \Delta a_n)^2}} \arccos \frac{a}{a + \Delta a_n} = 0$$

astfel încât:

$$\sigma - \frac{2\sigma_c}{\pi} \arccos \frac{a}{a + \Delta a_n} = 0 \quad (4.68)$$

$$\text{și } \frac{\pi\sigma}{2\sigma_c} = \arccos \frac{a}{a + \Delta a_n} \quad \text{sau} \quad \cos \frac{\pi\sigma}{2\sigma_c} = \frac{a}{a + \Delta a_n}$$

6). Ecuația (4.68) este asemănătoare cu ecuația (4.55) conducând la:

$$\Delta a_n = \frac{\pi^2 \sigma^2 a}{8\sigma_c} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I}{\sigma_c} \right)^2 \quad (4.69)$$

Mărimea zonei plastice Dugdale dată de ecuația (4.69) este :

$$\Delta a_n = 0,393 \left(\frac{K_I}{\sigma_c} \right)^2$$

Valoarea dată de această expresie rezultă ceva mai mare decât diametrul zonei plastice rezultat ca urmare a aplicării teoriei lui Irwin. Din analiza făcută de Irwin rezultă că diametrul zonei plastice $2r_y$ este:

$$2r_y = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_c} \right)^2 = 0,318 \left(\frac{K_I}{\sigma_c} \right)^2$$

În raport cu abordarea în termenii factorului de intensitate a tensiunii, modelul Dugdale ce utilizează funcțiile de tensiune are formă mai generală. Ecuația (4.69) are soluții singulare iar funcția:

$$\Phi_5(z) = \frac{2\sigma_c}{\pi} \operatorname{arccctg} \left[\frac{a}{z} \sqrt{\frac{z^2 - (a + \Delta a_n)^2}{(a + \Delta a_n)^2 - a^2}} \right] \quad (4.70)$$

reprezintă distribuția tensiunilor elastice ($\sigma = \sigma_c$) în interiorul și în apropierea zonei plastice. Astfel, seriile Taylor pentru funcția *arcctg* sunt:

$$\text{arcctg}(x) = \frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\right)$$

pentru $|x| < 1$. Argumentul funcției *arcctg* este imaginar în interiorul zonei plastice și are valoarea zero pentru $z = a + \Delta a_n$ și valoarea i pentru $z = a$. În aceste condiții ecuația (4.70) poate fi scrisă astfel:

$$\Phi_5(z) = \frac{2\sigma_c}{\pi} \text{arcctg}(p \cdot i) \quad \text{cu } 0 < p < 1$$

Din seriile Taylor este clar faptul că partea reală a $\text{arcctg}(p \cdot i) = \pi/2$ pentru că ceilalți termeni din serie au puteri impare și ca urmare vor rămâne imaginari. Astfel, pentru $a < x < a + \Delta a_n$ vom avea $\sigma_y = \text{Re} \Phi_5(z) = \sigma_c$. Ca urmare ecuația (4.70) stabilește egalitatea $\sigma = \sigma_c$ în întreaga zonă plastică de tip Dugdale, în care $a < x < a + \Delta a_n$ și $y = 0$.

4.5.2. Conceptul Dugdale [60] privind deplasarea la deschiderea vârfului fisurii

Pornind de la funcțiile de tensiune prezentate anterior se poate stabili o expresie pentru calculul deplasării la deschiderea vârfului fisurii. Deplasarea flancului fisurii v în regiunea dintre a și $a + \Delta a_n$ se poate obține prin substituția termenului nesingular din ecuația (4.67), respectiv funcția $\Phi_5(z)$ din ecuația (4.70), în ecuația (3.85b), corespunzătoare stării plane de tensiune:

$$v = \frac{1}{E} \left[2 \text{Im} \bar{\Phi}(z) - y(1 + \nu) \text{Re} \Phi(z) \right]$$

Se poate considera $y = 0$ întrucât în zona Dugdale avem un model de alunecare plastică în lungul axei x . Astfel, va rezulta:

$$v = \frac{2 \text{Im} \bar{\Phi}_5(z)}{E} \quad (4.71)$$

Este destul de dificil de obținut soluția exactă a ecuației (4.71). Expresia pentru deplasarea la deschiderea vârfului fisurii ca mărime fizică, se obține rezolvând ecuația (4.71) având în vedere faptul că $z \rightarrow a$. În aceste condiții vom avea:

$$2v_t = \delta_t = \frac{8\sigma_c a}{\pi E} \ln \left(\sec \frac{\pi \sigma}{2\sigma_c} \right) \quad (4.72)$$

Pentru a putea compara rezultatele obținute pe baza acestei expresii cu cele obținute de Irwin și de alți autori, relația (4.71) se va aduce la o formă mai simplă. Astfel, descompunerea în serii va duce la:

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \dots \quad \text{pentru } |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Dacă $\frac{\sigma}{\sigma_c} \ll 1$ atunci se îndeplinesc condițiile MRLE și ca urmare argumentul funcției \sec din ecuația (4.72) se așteaptă să fie mai mic decât unitatea. În aceste condiții se poate scrie:

$$\ln(\sec x) \approx \ln \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) \approx \frac{x^2}{2} \quad \text{și astfel:}$$

$$\delta_t = \frac{8\sigma_c a}{\pi E} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_c} \right)^2 = \frac{\pi\sigma^2 a}{E\sigma_c} = \frac{K_I^2}{E\sigma_c} \quad (4.73)$$

Această valoare a deplasării la deschiderea fisurii este puțin mai mică decât cea obținută pe baza analizei lui Irwin, ecuația (4.61):

$$\delta_t = \frac{4}{\pi} \frac{K_I^2}{E\sigma_c} = 1,27 \frac{K_I^2}{E\sigma_c}$$

4.6. Determinarea formei aproximative a zonei deformată plastic pe baza criteriilor Tresca și von Mises

Modelele prezentate anterior sunt limitate la extinderea zonei plastice de-a lungul axei x și au luat în considerare doar tensiunea σ_y . Aplicând criteriile Tresca și von Mises [140], se pot obține soluții noi pentru forma extinsă a enclavei plastice. Pentru determinarea formei zonei deformată plastic se pornește de la expresiile tensiunilor principale la vârful unei fisuri pentru starea plană de tensiune.

Criteriul Tresca se poate exprima în condițiile stării plane de tensiune sub forma:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \tau_c = \frac{\sigma_c}{2} \quad (4.74)$$

Înlocuind tensiunile principale σ_1 și σ_2 cu expresiile date de Irwin, (3.68), se obține:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} - 1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) = \sigma_c \quad \text{de unde rezultă:} \\ r_y(\theta) &= \frac{k_I^2}{2\pi\sigma_c^2} 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{k_I^2}{2\pi\sigma_c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (4.75)$$

Pentru starea plană de deformare, considerând $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, criteriul Tresca se exprimă sub forma:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \tau_c = \frac{\sigma_c}{2}$$

Dacă se ține cont de relațiile (3.69) și (3.69) rezultă:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} - 2\nu \right) = \sigma_c$$

și ca urmare vom avea:

$$r_y(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_c^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \quad (4.76)$$

În *figura 4.13* s-a reprezentat în coordonate polare variația razei zonei plastice, dată de raportul $R_y = \frac{r_y(\theta)}{\left(\frac{k_I}{\sigma_c} \right)^2}$, obținută aplicând criteriul de plasticitate Tresca.

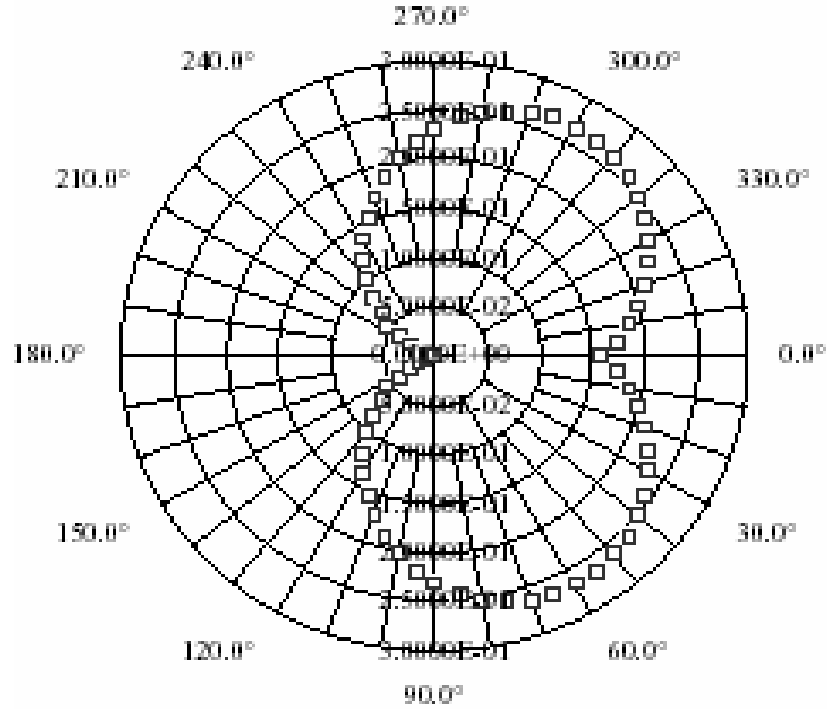


Fig. 4.13. Variația razei zonei plastice – Tresca

Criteriul von Mises stipulează că va apare curgerea plastică atunci când:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_c^2 \quad (4.77)$$

unde σ_1 , σ_2 și σ_3 reprezintă tensiunile principale. În secțiunea 3.8 relațiile care descriu starea de tensiune în *modul I* de solicitare exprimate prin tensiunile principale sunt:

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.70a)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.70b)$$

și $\sigma_3=0$ (stare plană de tensiune) sau $\sigma_3=v(\sigma_1+\sigma_2)$ pentru starea plană de deformare. Substituind în ecuația (4.77) se va obține pentru starea plană de tensiune:

$$\frac{K_I^2}{2\pi r} \left(1 + \frac{3}{2} \sin^2 \theta + \cos \theta \right) = 2\sigma_c^2 \text{ sau}$$

$$r(\theta)_{\text{stare plana de tensiune}} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_c} \right)^2 \left(1 + \frac{3}{2} \sin^2 \theta + \cos \theta \right) \quad (4.78)$$

dacă se au în vedere relațiile:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}; \quad \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

Ecuația (4.78) poate fi adimensională prin împărțirea cu r_y , obținându-se o primă aproximare a mărimii zonei deformate plastic pentru $\theta=0$ (axa x). Va rezulta:

$$\frac{r(\theta)_{\text{stare plana de tensiune}}}{r_y} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \quad (4.79)$$

Se constată că, pentru $\theta=0$ valoarea lui $r(\theta)$ este într-adevăr r_y iar pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$ (axa y)

valoarea lui $r(\theta)$ este $\frac{5}{4}r_y$.

Pentru starea plană de deformății, $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$ vom avea:

$$\frac{K_I^2}{2\pi r} \left[\frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \right] = 2\sigma_c^2$$

și ca urmare:

$$\frac{r(\theta)_{\text{stare plană de deformăție}}}{r_y} = \frac{3}{4} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \quad (4.80)$$

În lungul axei x ($\theta=0$) valorile pentru $r(\theta)$, în cazul stării plane de deformății, sunt mai mici decât în cazul stării plane de tensiuni. Presupunând $\nu = \frac{1}{3}$ se obține:

$$r(\theta=0)_{\text{stare plană de tensiuni}} = \frac{1}{9} r(\theta=0)_{\text{stare plană de deformăție}} = \frac{1}{9} r_y$$

În *figura 4.14* sunt reprezentate zonele deformate plastic în cazul stării plane de tensiuni și în cazul stării plane de deformății, în forma adimensională.

În mod analog se poate determina forma și mărimea zonei deformate plastic pentru *modul II* de deplasare a flancurilor fisurii.

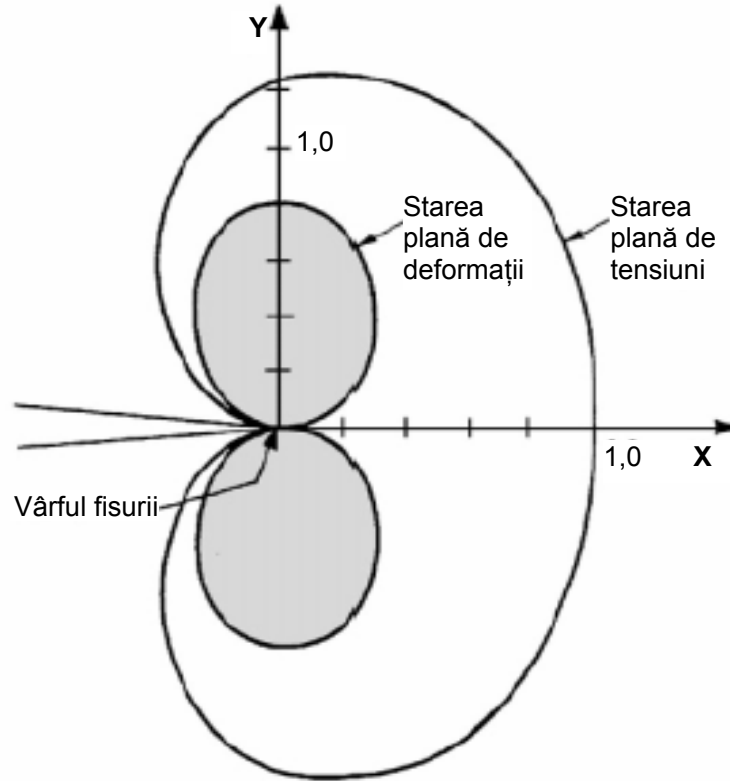


Fig. 4.14. Forma adimensională $\left[\frac{r(\theta)}{r_y} \right]$ a zonei deformate plastic conform criteriului von Mises

Utilizând criteriul de plasticitate *von Mises* se obține expresia razei zonei deformate plastic astfel:

- pentru starea plană de tensiune:

$$\frac{r_{II}(\theta)_{\text{stare plană de tensiune}}}{r_y} = \frac{7}{2} - \frac{9}{4} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \quad (4.81)$$

- pentru starea plană de deformare:

$$\frac{r_{II}(\theta)_{\text{stare plană de deformare}}}{r_y} = 3 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} (1 - 2\nu)^2 (1 - \cos \theta) \quad (4.82)$$

Din *figura 4.14* se observă că zona deformată plastic are o extindere mai mare pentru starea plană de tensiune în comparație cu starea plană de deformare. Această constatare confirmă recomandarea standardelor ce propun ca determinarea tenacității la rupere K_{Ic} să se facă pe epruvete ce îndeplinesc condițiile stării plane de deformare. De asemenea se constată faptul că zona deformată plastic pentru *modul II* de încărcare este mai extinsă după direcția axei x .

4.7. Influența stării de tensiuni asupra zonei plastice

În secțiunea 4.1 s-a menționat faptul că starea de tensiuni (în cazul stării plane de tensiuni sau a stării plane de deformare) afectează mărimea și forma zonei plastice, *figura 4.14* fiind o bună ilustrare în acest sens. Ca urmare este interesant de a vedea anumite detalii în ceea ce privește starea de tensiuni în regiunea de la vârful fisurii.

4.7.1. Forma și mărimea zonei plastice pe grosimea plăcii

Considerăm o fisură străpunsă într-o placă. Din relațiile (3.67) rezultă că tensiunile pe direcțiile x și y sunt date prin:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (4.83)$$

Ecuția (4.83) arată că pentru valori mici ale lui r , atât σ_x cât și σ_y vor depăși tensiunea de curgere a materialului. Astfel, la vârful fisurii se va forma zona plastică biaxială. Presupunând, într-o primă etapă, că se stabilește o stare plană și uniformă de tensiuni, și că zona plastică este circulară conform analizei lui Irwin, atunci când se face o secțiune prin placă în planul fisurii date, modelul arată ca în *figura 4.15*.

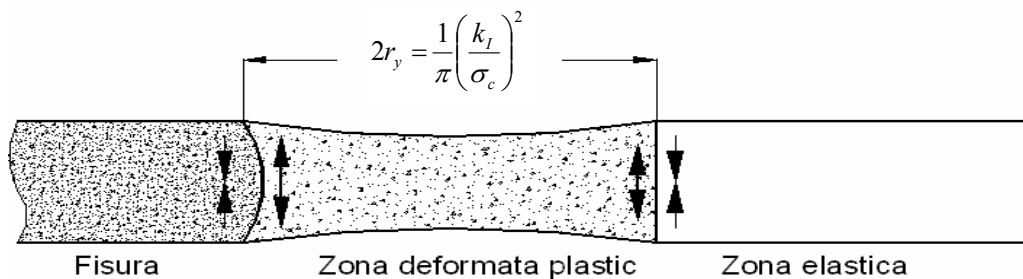


Fig. 4.15. Secțiune schematică în planul fisurii

Fără a se produce o durificare în interiorul zonei plastice, materialul trebuie să fie capabil să curgă liber în această zonă și să se contracteze pe direcția grosimii plăcii. În orice caz, materialul elastic adiacent zonei plastice nu se poate contracta în aceeași măsură. Acest fenomen, numit constrângere plastică, conduce la apariția tensiunilor de tracțiune pe direcția grosimii, la granița zonei plastice cu cea elastică, acolo unde apar tensiuni pe toate cele trei direcții.

La suprafața plăcii nu sunt tensiuni pe direcția grosimii plăcii și ca urmare aici este o stare plană de tensiuni. Cu cât ne deplasăm spre interior, cu atât crește gradul de triaxialitate, care se apropie și eventual poate corespunde cu starea plană de deformare. Astfel, într-o primă aproximare, mărimea și forma zonei plastice poate fi considerată ca variabilă pe grosimea plăcii. Pentru o placă de grosime intermediară care nu are nici starea plană de tensiuni totală nici starea plană de deformare predominantă, zona plastică poate avea forma schematică prezentată în *figura 4.16*.

În orice caz, regiunile de la suprafață aflate în stare plană de tensiuni vor avea o deplasare v mai mare, pentru aceeași valoare a tensiunii σ aplicate, în raport cu deplasarea calculată pe baza relațiilor (3.86). Se constată așadar că, mărimea zonei deformată plastic în regiunea stării plane de tensiuni va fi mai mică decât cea obținută în primă aproximare și respectiv, mărimea zonei deformată plastic în regiunea stării plane de deformare va fi mai mare decât cea obținută în primă aproximare.

Pe baza analizei cu elemente finite se poate constata că variațiile măririi zonei deformată plastic pe grosimea plăcii sunt mult mai mici în raport cu cele arătate schematic în *figura 4.15*. Un calcul simplu al distribuției stării de tensiuni pe grosimea plăcii nu este posibil. Un astfel de calcul se face doar pentru a putea estima dacă sunt predominante condițiile stării plane de tensiuni sau condițiile stării plane de deformare.

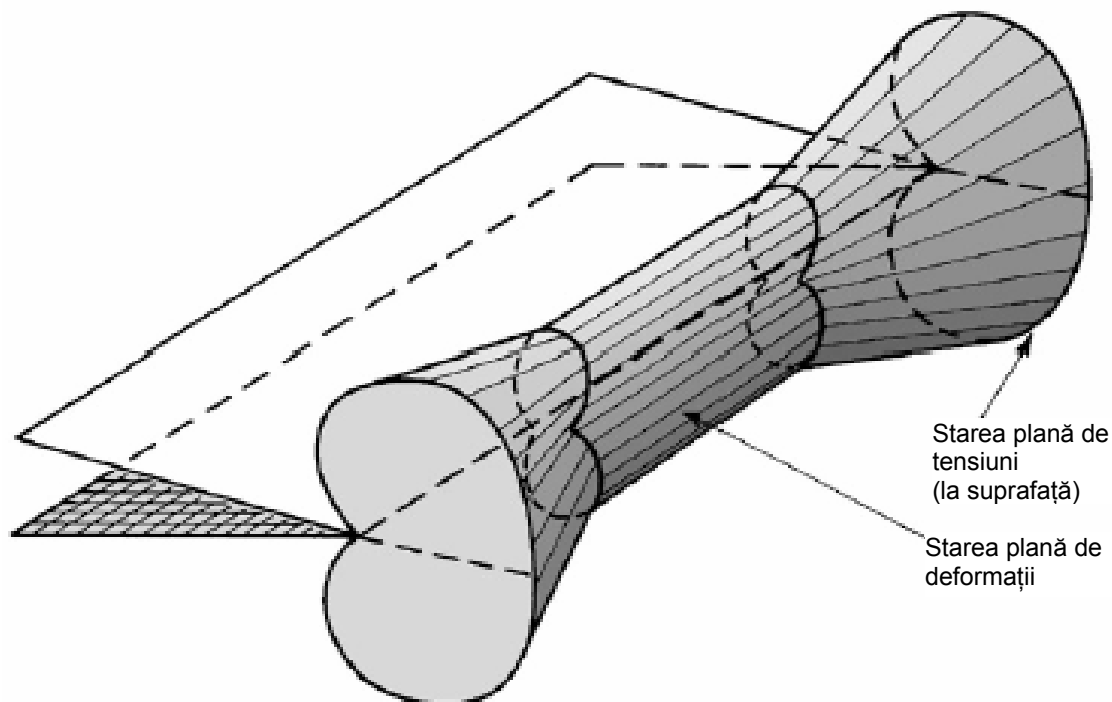


Fig. 4.16. Variația zonei plastice într-o placă de grosime intermediară

1. Ne putem aștepta să avem o stare plană totală de tensiuni, dacă mărimea calculată a zonei plastice din cadrul stării plane de tensiuni, $2r_y$ în analiza Irwin, este de ordinul grosimii plăcii.
2. Vom avea o stare plană de deformare atunci când mărimea calculată a zonei plastice din cadrul stării plane de tensiuni, $2r_y$ (valoarea aproximativă de la suprafața plăcii), nu este mai mare de o zecime din grosimea plăcii.

4.7.2. Mărima zonei plastice pe grosimea plăcii și factorul de constrângere a plasticității

În capitolul 3 s-a văzut că, ecuațiile care dau câmpul de tensiuni au fost exprimate și în termenii tensiunilor principale (relația 3.69). Utilizând aceste expresii, în condițiile stării plane de deformății se obține:

$$\sigma_2 = \sigma_1 \left(\frac{1 - \sin \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}} \right); \quad \sigma_3 = \sigma_1 \left(\frac{2\nu}{1 + \sin \frac{\theta}{2}} \right)$$

Se constată că, dacă $\theta=0$ atunci $\sigma_2=\sigma_1$ și $\sigma_3=2\nu\sigma_1$.

Presupunând că suntem în domeniul elastic cu $\nu=1/3$, se poate utiliza criteriul de rupere al lui von Mises, ecuația (4.77), pentru a determina valoarea lui σ_1 care este atinsă înainte de a apărea curgerea:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \left(\sigma_1 - \frac{2}{3}\sigma_1 \right)^2 + \left(\frac{2}{3}\sigma_1 - \sigma_1 \right)^2 = 2\sigma_c^2$$

și ca urmare:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 3\sigma_c \text{ și } \sigma_3 = 2\sigma_c$$

Această analiză simplă sugerează faptul că raportul între σ_1 și tensiunea de curgere devine mai mare de 3 pentru starea plană de deformăție. În mod obișnuit acest raport este numit *factor de constrângere plastică* și se notează cu C .

Într-o primă aproximare, mărimea zonei plastice, în cadrul stării plane de deformăție în lungul axei x , poate fi scrisă ca fiind:

$$r_y \text{ starea plana de deformatie} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{C\sigma_c} \right)^2 \quad (4.84)$$

care, pentru $C=3$ conduce la $r_y \text{ starea plana de deformatie} = \frac{1}{9} r_y$.

Acest rezultat a fost obținut și în secțiunea 4.4. Valoarea lui r_y pentru *starea plană de deformății* trebuie să fie în mod considerabil subestimată pe toată grosimea plăcii întrucât la suprafața acesteia avem în mod cert o stare plană de tensiuni iar mărimea zonei plastice aici va fi r_y , deci de 9 ori mai mare. De aceea *Irwin* propune utilizarea unei valori intermediare pentru factorul de constrângere a plasticității C și anume $\sqrt{3}$, astfel încât valoarea nominală a lui r_y în cadrul stării plane de deformății să fie:

$$r_y \text{ starea plana de deformatie} = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_c} \right)^2 = \frac{1}{3} r_y \quad (4.85)$$

Această valoare se regăsește cel mai adesea în literatura de specialitate.

4.8. Planele tensiunii tangențiale maxime

Locația planelor tensiunii tangențiale maxime în vecinătatea vârfului fisurii este influențată mai degrabă de starea de tensiuni decât de forma și mărimea zonei deformate plastic. Acest lucru este arătat în *figura 4.17* în care s-au mai construit și cercurile lui Mohr pentru tensiunile principale în cadrul stării plane de tensiuni și în cadrul stării plane de deformății.

1) Starea plană de tensiuni

Pentru o fisură reală cu raza la vârf finită (datorită apariției zonei plastice) vom avea $\sigma_y > \sigma_x$ pentru $\theta=0$, tensiunile principale σ_1 și σ_2 sunt σ_y și σ_x respectiv $\sigma_3=\sigma_z=0$. În mod obișnuit se consideră $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Din figura 4.17a se poate constata că tensiunea tangențială maximă τ_{\max} se află în plane orientate la 45° față de axa x.

2) Starea plană de deformății

Pentru o fisură reală aflată într-o stare plană de deformăție situația este puțin mai complicată. În acest caz σ_y este, de asemeni, mai mare decât σ_x . Când ne deplasăm de la suprafață, unde avem o stare plană de tensiuni, spre interior, unde avem o stare plană de deformății, σ_z crește treptat de la 0 (starea plană de tensiuni) la $\nu(\sigma_x + \sigma_y)$, atunci când se atinge starea plană de deformăție pură. Având în vedere faptul că deformările plastice presupun că volumul nu se schimbă, în interiorul zonei plastice “v plastic” trebuie să aibă valoarea 0,5. În consecință, în zona stării plane de deformății σ_z va fi de asemenea mai mare ca σ_x . Ca urmare, planele tensiunilor tangențiale maxime vor face un unghi de 45° cu axa z de această dată, figura 4.17b. Astfel, în cadrul stării plane de tensiuni, tensiunile principale σ_1 , σ_2 și σ_3 sunt egale cu σ_y , σ_x și σ_z în timp ce în cadrul stării plane de deformății acestea sunt egale cu σ_y , σ_z și σ_x . De notat că situațiile arătate în figura 4.17 sunt valabile numai în interiorul unei regiuni relativ mici din cadrul zonei deformată plastic de la vârful fisurii. Materialul nu va suferi lunecări macroscopice în lungul planelor tensiunilor tangențiale maxime dar va căpăta o deformare de o manieră ceva mai complexă.

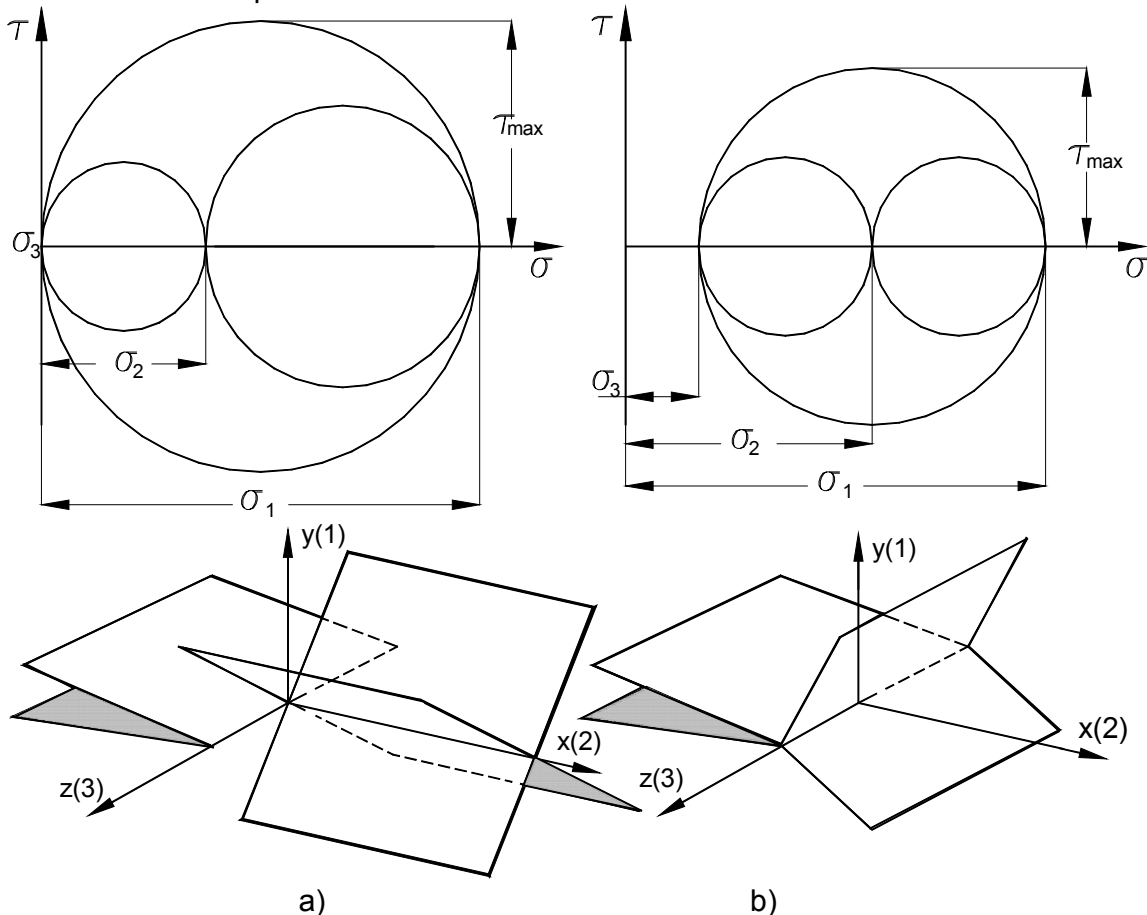


Fig. 4.17. Locația planelor tensiunii tangențiale maxime la vârful fisurii pentru:
a) starea plană de tensiuni b) starea plană de deformății

4.9. Influența stării de tensiune asupra comportării la fisurare

În această secțiune vor fi discutate efectele stării de tensiune asupra rezistenței la rupere și apariției ruperii.

Aspectul suprafeței obținute prin rupere. Dacă o probă sau o piesă este încărcată static până la rupere, suprafața ruptă va avea, în general, forma prezentată în *figura 4.18*. Extinderea fisurii din prefisură are loc în modul I de fisurare, suprafața fiind netedă dar fiind acompaniată aproape imediat de mici margini transversale.

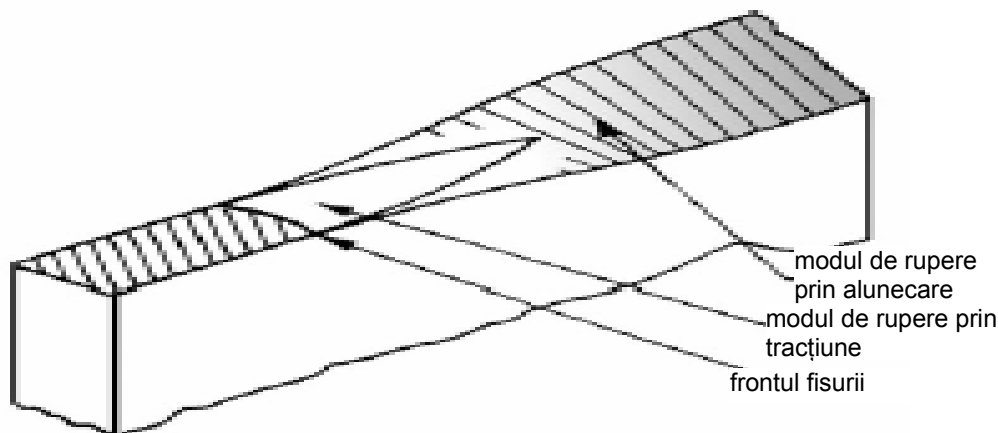


Fig. 4.18. Aspectul suprafeței rupte prin încărcarea statică a unei probe prefisurate

În momentul în care fisura se extinde (ceea ce face să se ajungă la instabilitate) marginile transversale cresc până când acoperă întreaga suprafață fisurată care devine în totalitate înclinată (cu înclinarea simplă sau dublă). Această comportare este în mod obișnuit atribuită extinderii fisurii, mai întâi în condiții predominante ale stării plane de deformății și apoi în condițiile stării plane de tensiuni. Un model exact al tranziției de la suprafața plană la cea înclinată nu există, dar pare evident faptul că schimbarea planelor tensiunii tangențiale maxime, (vezi *figura 4.17*), joacă un rol important. Studiile efectuate de Rosenfield și Hahn [103] indică faptul că, în condițiile stării plane de deformăție zona plastică este de tip “articulație”, *figura 4.19a*, în timp ce în condițiile stării plane de tensiuni, după inițierea zonei de tip “articulație”, ruperea se produce prin alunecarea după plane orientate la 45° pe grosimea probei, *figura 4.19b*.

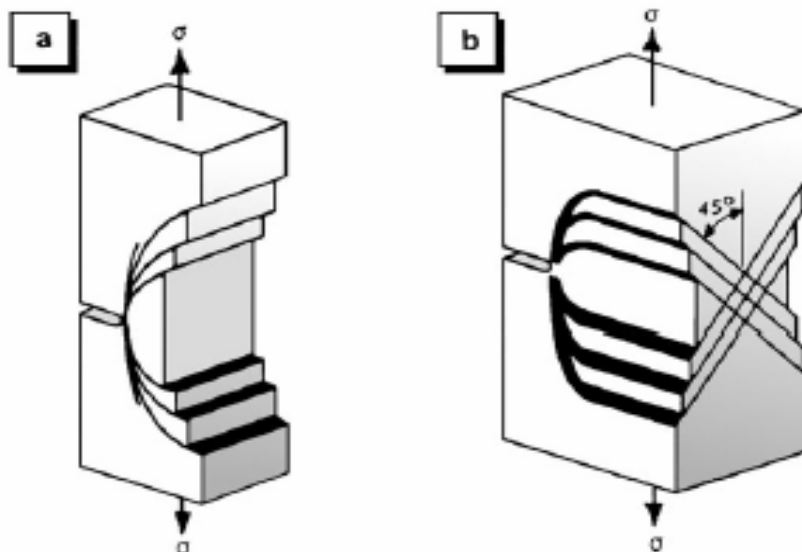


Fig. 4.19. Moduri de deformare; a) starea plană de deformăție; b) starea plană de tensiuni

Inceputul fisurării se produce prin smulgerea materialului între benzile de alunecare de tip articulație, *figura 4.20*.

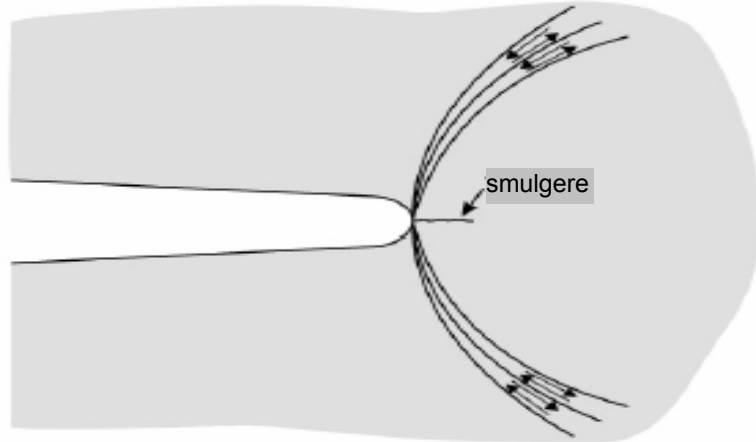


Fig. 4.20. Smulgerea materialului între benzile de alunecare de tip articulație

Rezistența la fisurare. Factorul critic de intensitate a tensiunilor la rupere, K_{Ic} , depinde de grosimea probei. O asemenea dependență este prezentată în *figura 4.21*. Se poate constata că, dincolo de o anumită grosime, atunci când materialul se află într-o stare plană de deformății predominantă și sub constrângere maximă, valoarea lui K_{Ic} tinde să se limiteze la o constantă. Această valoare este numită rezistență la rupere în cadrul stării plane de deformății, K_{Ic} , și poate fi considerată ca fiind o caracteristică de material.

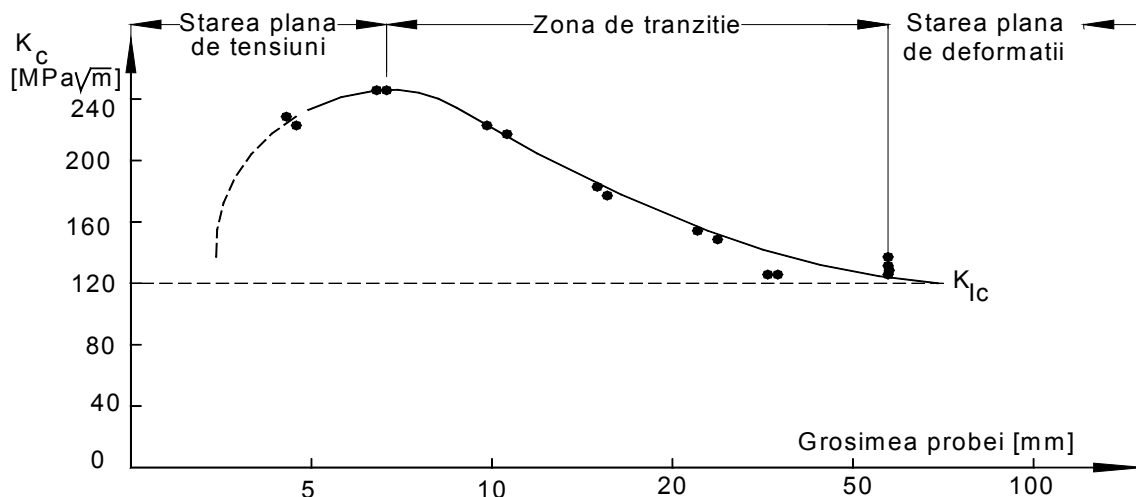


Fig. 4.21. Variația K_{Ic} cu grosimea probei într-un oțel înalt rezistent

Comportarea ilustrată în *figura 4.21* este pusă în general pe seama tranziției de la starea plană de tensiune la starea plană de deformății ce apare odată cu creșterea grosimii probei. Pentru probele foarte subțiri (grosimea < 1 mm) această dependență este destul de greu de stabilit (linia întreruptă din *figura 4.21*). Se constată așadar că, pentru a determina K_{Ic} ca fiind o constantă de material trebuie ca probele utilizate în acest sens să depășească o anumită grosime. De această grosime dar și de limita de curgere va depinde mărimea zonei deformate plastic de la vârful fisurii.

În secțiunea 4.1 s-a arătat că este destul de dificil de a estima în același timp, în mod corect, forma și mărimea zonei deformate plastic de la vârful fisurii. Această

problemă se poate aborda în două moduri: experimental și pe baza analizei cu elemente finite.

Modul experimental. Cele mai cunoscute lucrări în domeniu sunt cele ale lui Hahn și Rosenfield [103]. Ei au utilizat probe dintr-un aliaj Fe-Si care au proprietatea că regiunile deformate plastic pot fi marcate și făcute vizibile. Câteva din aceste rezultate sunt prezentate în *figurile 4.22 a și b*. Proba din *figura 4.22a* a fost în stare plană de tensiuni, forma zonei plastice fiind reprezentată schematic în *figura 4.22b*. Această formă este asemănătoare cu cea determinată pe baza modelului curgerii benzilor al lui Dugdale. Pentru starea plană de deformare, se constată că zonele deformate plastic aproape că se închid și par să aibe forma din *figura 4.14* care a fost derivată din criteriul de curgere *von Mises*.

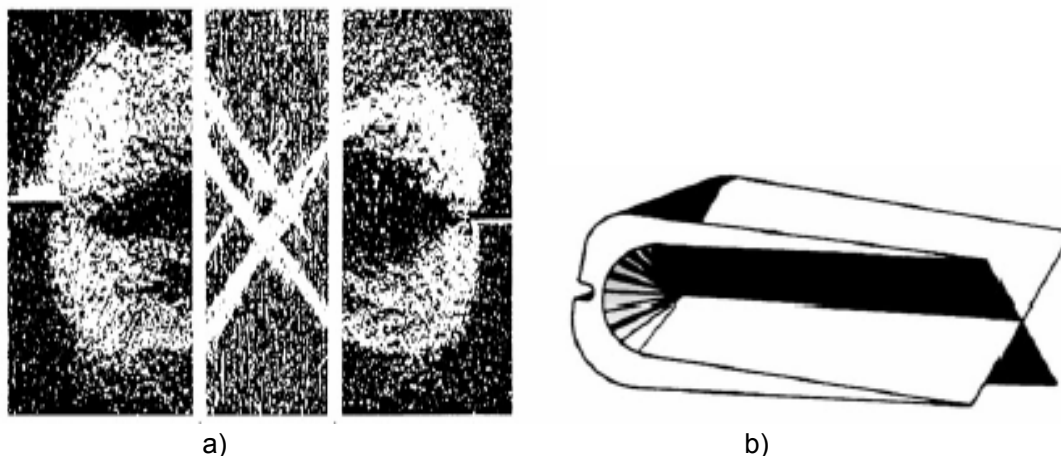


Fig. 4.22. Apariția zonei plastice la suprafață și în imediata vecinătate

Analiza cu elemente finite. În *figura 4.23* se prezintă mărimea și forma zonei deformate plastic la vârful fisurii prin comparație între analiza cu elemente finite și criteriul de rupere *von Mises*.

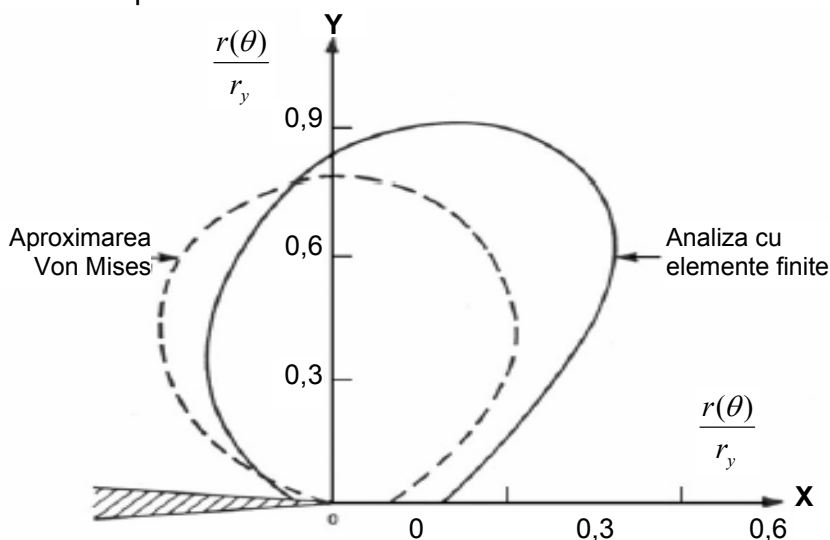


Fig. 4.23. Comparație privind mărimea și forma zonei plastic deformate

Se constată anumite abateri atât de la forma cât și de la mărimea zonei în cazul celor două analize. Având în vedere faptul că în cazul criteriului *von Mises* s-au făcut anumite aproximări (preluarea doar a primului termen din seriile Taylor) se consideră analiza cu elemente finite a avea o mai bună acuratețe.