

## CAPITOLUL 3

### ELEMENTE DE MECANICA RUPERII ÎN DOMENIUL LINIAR ELASTIC

- 
- 3.1. *Introducere*
  - 3.2. *Bazele Mecanicii liniare a ruperii*
  - 3.3. *Stabilitatea microfisurilor și condiții de propagare*
  - 3.4. *Energia potențială liberă și variația acesteia în funcție de complianță*
  - 3.6. *Rezistența la fisurare  $R$  și „forța” de extensie a fisurii  $G$*
  - 3.7. *Moduri de solicitare – moduri de rupere*
  - 3.8. *Analiza Irwin privind starea de tensiune și deformație din vecinătatea unei fisuri*
  - 3.9. *Relația dintre energia disponibilă pentru propagarea fisurii și factorul de intensitate a tensiunii*
  - 3.10. *Factorul de intensitate a tensiunii în raport cu complianța epruvetei*
  - 3.11. *Tenacitatea la fisurare – noțiuni*
  - 3.12. *Relația între parametrii tenacității*
  - 3.13. *Disiparea energiei la vârful fisurii*
  - 3.14. *Lucrul mecanic la rupere*
  - 3.15. *Considerații privind calculul de rezistență pe baza conceptelor mecanicii ruperii pentru modul I de solicitare*
  - 3.16. *Criterii de rupere în condițiile unor moduri mixte de solicitare*
- 

#### 3.1. Introducere

În capitolul 2 a fost subliniat faptul că rezistența la rupere a materialelor este determinată de prezența defectelor. Pentru un comportament liniar-elastic, Mecanica Liniar-Elastică a Ruperii (MLER) permite caracterizarea unui material în raport de existența unei fisuri în volumul acesteia. În acest capitol vor fi dezvoltate diferite aproximări care sunt utilizate, fie în termenii bilanțului energetic fie în termenii concentratorilor de tensiuni și care permit elaborarea unor criterii de rupere. Aceste criterii sunt de o importanță fundamentală pentru optimizarea materialelor și pentru a putea prevedea comportamentul pieselor în condiții reale de utilizare. Vor fi prezentate și discutate diferite metode experimentale utilizate pentru a caracteriza comportamentul la fisurare al materialelor.

#### 3.2. Bazele Mecanicii liniare a ruperii

Mecanica liniară a ruperii presupune că materialul este perfect elastic, omogen și izotrop. Materialul este considerat ca fiind un mediu continuu (în sens macoscopic) dar este admisă prezența fisurilor în volumul acestuia. Mecanisme care conduc la inițierea și propagarea fisurilor sunt în general foarte complexe la scară atomică. Se poate stabili o relație între rezistența globală a propagării și parametrul care rezultă din încărcare.

---

În anul 1920 Griffith face presupunerea că o fisură se propagă instabil atunci când energia mecanică eliberată prin extensia sa este superioară energiei absorbite prin această propagare: energia potențială a sistemului (mediu considerat continuu cu fisuri) diminuează pe măsură ce fisura se propagă, [102].

Considerăm o placă de grosime unitară, confecționată dintr-un material ideal-elastic în care există o fisură străpunsă de lungime  $2a$ , aproximată printr-o elipsă alungită, *figura 3.1*. Dimensiunile plăcii sunt cu mult mai mari decât dimensiunile fisurii. Placa este supusă unei stări de tensiuni monoaxiale, distribuția tensiunilor în placă fiind astfel încât la o anumită depărtare de fisură tensiunile principale sunt perpendiculare și respectiv paralele cu axa mare a elipsei.

Într-o placă de grosime infinit mică avem o stare plană de tensiuni – tensiunea normală pe placă fiind egală cu zero [61]. Pentru o placă groasă se obține o stare plană de deformății – deformăția pe grosimea plăcii fiind egală cu zero. În vederea dezvoltării bilanțului energetic este necesar să se calculeze tensiunea pentru care fisura se propagă. Energia totală înmagazinată în placa din *figura 3.1* poate fi scrisă sub forma:

$$W = W_0 + \Delta W_e + \Delta W_\gamma - L \quad (3.1)$$

în care avem:

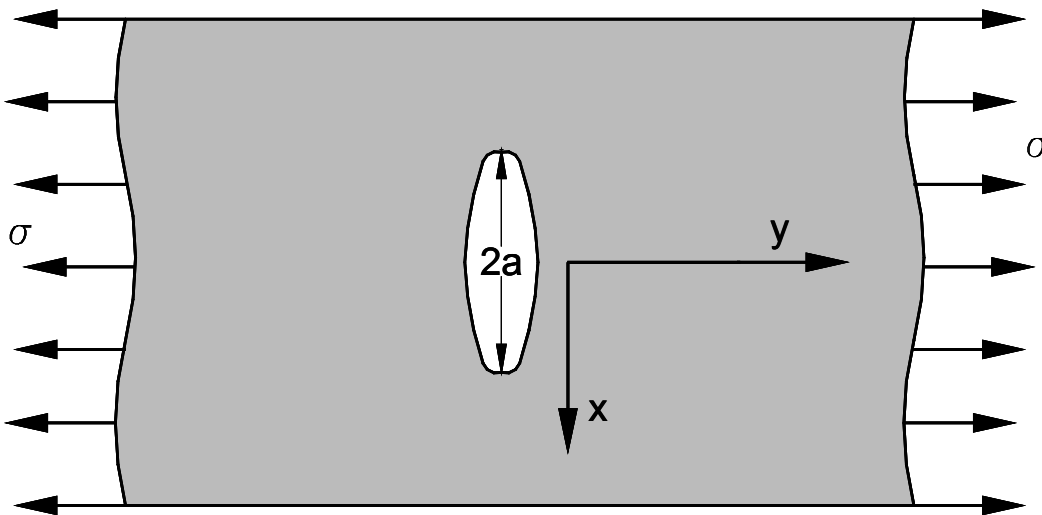
$W_0$  – energia de deformăție elastică disponibilă atunci când fisura nu se propagă în timp ( $a=\text{const.}$ );

$\Delta W_e$  – variația energiei de deformăție elastică ca urmare a propagării fisurii;

$\Delta W_\gamma$  – variația energiei superficiale ca urmare a formării noilor suprafețe ale fisurii în extensie;

$L$  – lucrul mecanic al forțelor exterioare.

În relația (3.1) s-a avut în vedere semnul lucrului mecanic utilizat în termodinamică, respectiv, lucrul mecanic primit de un sistem este negativ.



**Fig. 3.1.** Microfisură de tip Griffith

Propagarea instabilă a fisurii de lungime  $2a$  care străbate o grosime egală cu unitatea se produce atunci când:

$$\frac{dW}{da} \leq 0 \quad (3.2)$$

respectiv, pentru ca o fisură să se propage instabil, variația lucrului mecanic al forțelor exterioare trebuie să fie mai mare decât variația energiilor dezvoltate prin propagare, respectiv  $\Delta W_\gamma$  și  $\Delta W_e$ .

Tinând cont de faptul că  $W_0$  este constantă, va rezulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{da}(\Delta W_e + \Delta W_\gamma - L) &\leq 0 \quad \text{sau} \\ \frac{d}{da}(L - \Delta W_e) &\leq \frac{d(W_\gamma)}{da} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Din relația de mai sus rezultă că instabilitatea în propagarea unei fisuri se produce atunci când energia de deformare elastică disponibilă într-un corp este cel puțin egală cu energia necesară formării noilor suprafețe de rupere.

Introducând notațiile:

$$\frac{d}{da}(L - \Delta W_e) = G$$

unde  $G$  reprezintă "forța" de extensie a fisurii (energia disponibilă pentru propagare) și

$$\frac{d(W_\gamma)}{da} = R$$

în care  $R$  este denumită "rezistența" la fisurare (energia consumată prin propagare), relația (3.3) devine:

$$G \geq R \quad (3.4)$$

Ca urmare, o fisură se va propaga instabil atunci când „forța” de extensie a fisurii este cel puțin egală cu rezistența la fisurare. Criteriul de propagare dat de relația (3.2) este valabil în cazul unui material cu comportare liniar-elastică sau chiar neliniar-elastică dar nu este valabil pentru un material cu comportare elasto-plastică.

Pentru a propaga o fisură de la valoarea  $2a$  la valoarea  $2(a+da)$  se iau în considerație două tipuri de încercări:

- la tensiune constantă (în timpul propagării): mașină de încercat „moale”, *figura 3.2a*;
- la deformare constantă; mașină de încercat „dură”, *figura 3.2b*.

**Încărcare constantă ( $F=\text{const.}$ ).** Pentru propagarea semifisurii cu  $da$ , la aceeași valoare a forței are loc o deplasare a punctelor sale de aplicație cu  $du$ : de la  $u_1$  la  $u_2$ . Energia elastică înmagazinată în placă va suferi o variație de forma:

$$dW_e = \frac{1}{2}Fu_2 - \frac{1}{2}Fu_1 = \frac{1}{2}F(u_2 - u_1) = \frac{1}{2}Fdu$$

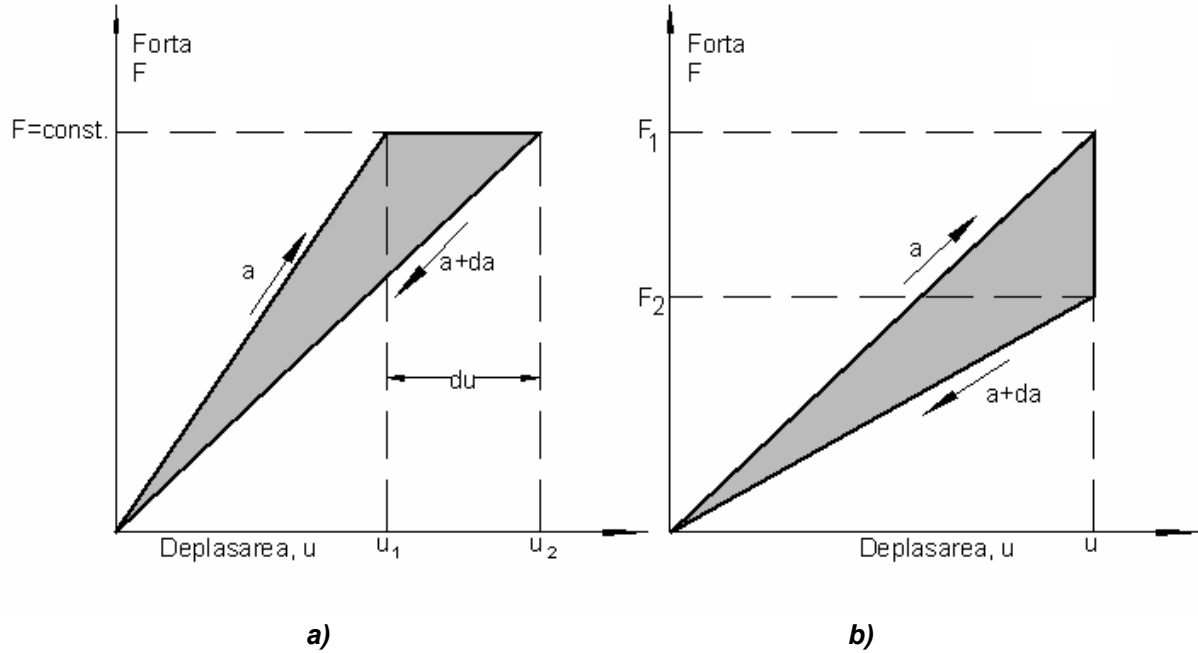
Variația lucrului mecanic al forțelor exterioare va fi:

$$dL = F(u_2 - u_1) = Fdu$$

Ca urmare, energia disponibilă pentru propagarea fisurii va fi:

$$dL - dW_e = Fdu - \frac{1}{2}Fdu = \frac{1}{2}Fdu \quad (3.5)$$

Termenul  $\frac{1}{2}Fdu$  reprezintă aria marcată din *figura 3.2a*.



**Fig. 3.2.** Diagrama încărcare-deplasare (domeniul elastic) atunci când are loc propagarea fisurii

**Deformație constantă ( $u=\text{const.}$ ).** Propagarea semifisurii cu  $da$  are loc după ce forța a atins valoarea  $F_1$ , diminuarea forței la valoarea  $F_2$  având loc tocmai ca urmare a eliberării de energie datorită respectivei propagări [69]. Diminuarea energiei de deformație elastică sau, în acest caz, energia disponibilă pentru propagarea fisurii, va fi:

$$dW_e = \frac{1}{2} F_1 u - \frac{1}{2} F_2 u = \frac{1}{2} u (F_1 - F_2) = \frac{1}{2} u dF \quad (3.6)$$

Termenul  $\frac{1}{2} u dF$  reprezintă aria marcată din figura 3.2b.

Fie  $C$  complianța sistemului (epruvetă+mașina de încercat) dată de relația  $C = \frac{u}{F}$ . Dacă  $da \rightarrow 0$  se poate considera  $C = \text{const.}$  Și atunci vom avea:

$$dW = C \cdot dF \quad (3.7)$$

Tinând cont de relația (3.7), relația (3.5) se poate scrie astfel:

$$dL - dW_e = \frac{1}{2} F du = \frac{1}{2} F C dF$$

iar relația (3.6) devine:

$$dW_e = \frac{1}{2} u dF = \frac{1}{2} C F dF$$

Se constată așadar că, la o creștere infinitesimală a fisurii, energia disponibilă pentru propagarea acesteia este aceeași în cele două cazuri, cel al propagării fisurii sub forță constantă și cel al propagării fisurii la deplasare constantă. Se poate spune că, atunci când creșterea fisurii este infinitesimală, ariile marcate din figurile 3.2a și 3.2b tind spre o aceeași valoare. În aceste condiții vom avea:

$$\frac{d}{da} [L - W_e]_{F=\text{const.}} = \left[ \frac{dW_e}{da} \right]_{u=\text{const.}} \quad (3.8)$$

Ca urmare, relația (3.3) se poate simplifica dacă se consideră numai variația energiei elastice a solidului fisurat. Astfel, relația (3.3) devine:

$$\frac{dW_e}{da} \geq \frac{dW_\gamma}{da} \quad (3.9)$$

Atunci când fisura se propagă energia necesară pentru formarea noilor suprafețe va fi:

$$dW_\gamma = 4da\gamma_s \quad (3.10)$$

întrucât se formează câte două suprafețe la fiecare din cele două extremități ale fisurii,  $\gamma_s$  fiind energia superficială. Astfel, relația (3.9) se transformă astfel:

$$\frac{dW_e}{da} \geq 4\gamma_s \quad (3.11)$$

Pentru a determina variația energiei de deformare elastică atunci când se produce o creștere a fisurii cu  $da$ , se consideră lucrul mecanic furnizat în cazul relaxării progresive a tensiunilor, de la  $\sigma$  la zero, la suprafața fisurii. Fie  $u(x)$  deplasările punctelor de pe suprafața fisurii. Energia elastică relaxată, atunci când are loc propagarea fisurii, este egală cu lucrul mecanic efectuat în cursul acestei deplasări. Ca urmare vom avea:

$$W_e = 4 \int_0^a \frac{1}{2} \sigma u(x) dx \quad (3.12)$$

în care  $u(x)$  reprezintă deplasările după direcția  $y$  a muchiilor fisurii, *figura 3.1*, și sunt date de relația, [46]:

$$- u(x) = \frac{2\sigma}{E} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ pentru starea plană de tensiuni} \quad (3.13)$$

$$- u(x) = \frac{2\sigma(1-\nu^2)}{E} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ pentru starea plană de deformății} \quad (3.14)$$

Înlocuind relația (3.13) în relația (3.12) se obține:

$$W_e = 2\sigma \int_0^a \frac{2\sigma}{E} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4\sigma^2}{E} \arcsin \frac{\pi a^2}{4}$$

Dacă se are în vedere propagarea infinitesimală a fisurii se poate face aproximarea  $\arcsin \frac{\pi a^2}{4} \cong \frac{\pi a^2}{4}$ . În aceste condiții se obține:

$$- W_e = \frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} \text{ pentru starea plană de tensiuni} \quad (3.15)$$

$$- W_e = \frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} (1-\nu^2) \text{ pentru starea plană de deformății} \quad (3.16)$$

în care: -  $E$  reprezintă modulul de elasticitate longitudinal  
-  $\nu$  este coeficientul lui Poisson.

În aceste condiții relația (3.11) se scrie astfel:

$$\begin{aligned} - \frac{dW_e}{da} &= \frac{2\pi a \sigma^2}{E} \geq 4\gamma_s \text{ pentru starea plană de tensiuni} \\ - \frac{dW_e}{da} &= \frac{2\pi a \sigma^2}{E} (1-\nu^2) \geq 4\gamma_s \text{ pentru starea plană de deformății} \end{aligned}$$

de unde va rezulta tensiunea necesară propagării fisurii. Astfel, vom avea:

- în cazul stării plane de tensiuni (plăci subțiri):

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}} \quad (3.17)$$

- în cazul stării plane de deformății (plăci groase):

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a} \cdot \frac{1}{1-\nu^2}} \quad (3.18)$$

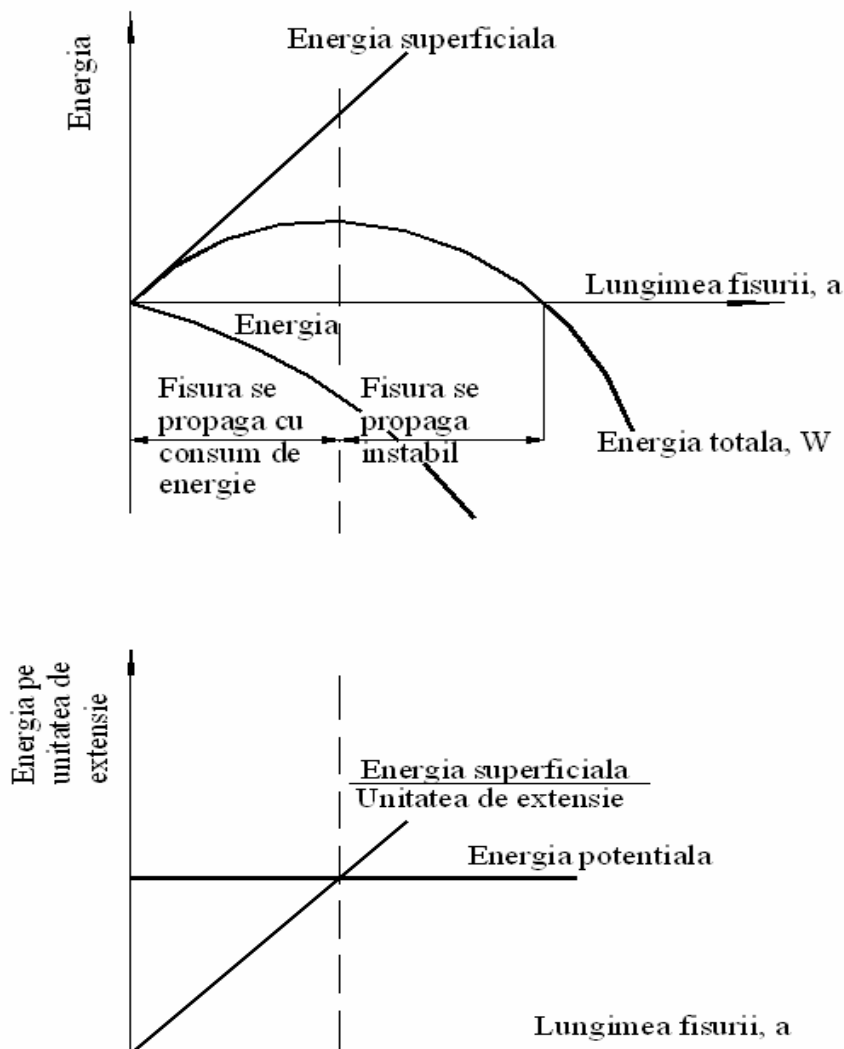
Aceste relații, stabilite de Griffith, reprezintă condiția necesară pentru propagarea instabilă a unei fisuri de lungime  $2a$  într-o placă de grosime unitară considerată a avea o comportare liniar-elastică și dimensiuni infinite în raport cu cele ale fisurii. Relația (3.18) se poate scrie și sub forma:

$$\sigma_f \sqrt{a} = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi} \cdot \frac{1}{1-\nu^2}} \quad (3.19)$$

În partea dreaptă a acestei egalități se găsesc constantele de material  $E$ ,  $\nu$  și  $\gamma_s$ . Rezultă faptul că, propagarea instabilă a unei fisuri într-un material ideal elastic are loc atunci când produsul  $\sigma \sqrt{a}$  atinge o valoare critică, specifică fiecărui material.

### 3.3. Stabilitatea microfisurilor și condiții de propagare

Criteriul Griffith aplicat la ruperea unui solid ce conține o fisură de semilungime  $a$  se poate vedea ilustrat în *figura 3.3* în care este reprezentată variația energiei sistemului în raport cu lungimea fisurii.



**Fig. 3.3.** Variația energiei sistemului (solid+fisură) în raport cu lungimea fisurii

Criteriul Griffith indică faptul că ruperea se produce la o tensiune pentru care variația energiei potențiale este egală sau superioară variației energiei necesare pentru formarea de noi suprafețe.

Fie  $G$  energia potențială totală liberă pe unitatea de suprafață a fisurii propagate:

$$G = \frac{dW}{da} \quad (3.20)$$

Termenul energetic  $G$  reprezintă energia disponibilă pentru a face să progreseze fisura, sau, așa cum s-a subliniat în § 3.2.1, mai este denumită „forță” de extensie a fisurii.

Fisura se va propaga atunci când  $G$  devine egală cu energia superficială, lungimea fisurii fiind critică,  $a=a_c$ :

$$G = 2\gamma_s \quad (3.21)$$

Se consideră energia totală a sistemului:

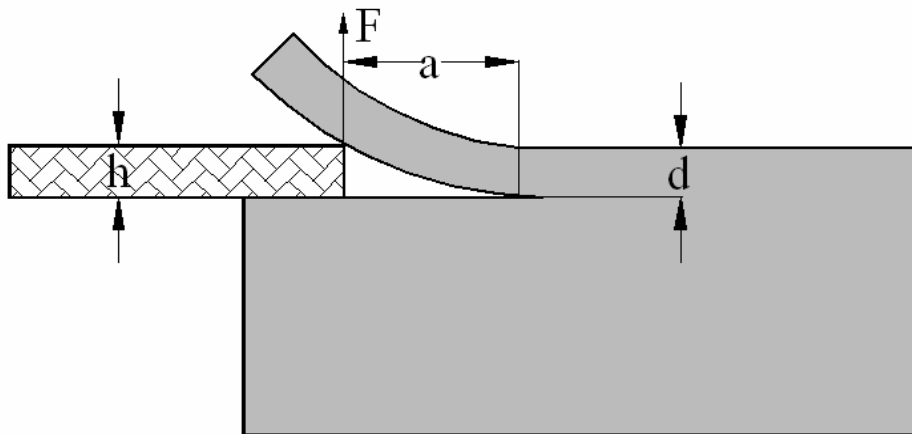
$$W = (W_e - L) + W_\gamma = -\frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} + 4\gamma_s a$$

Echilibrul termodinamic este atins atunci când energia mecanică și cea de suprafață se compensează pentru o creștere virtuală a fisurii cu  $da$ . La echilibru se obține:

$$\frac{dW}{da} = 0$$

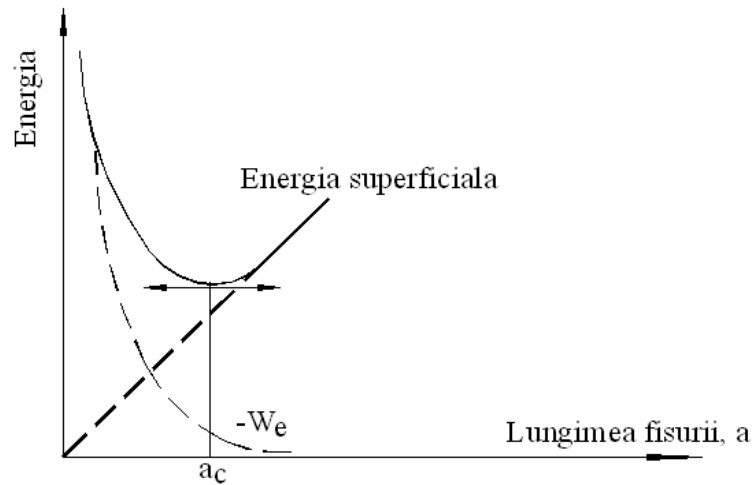
Ruperea se produce atunci când  $W$  atinge un punct de extrem, respectiv un maxim  $\left(\frac{d^2W}{da^2}\right) < 0$  și corespunde fisurii supusă la o forță de tracțiune constantă atunci când se trece în zona de echilibru instabil. Aceasta semnifică faptul că pentru o lungime a fisurii  $a < a_c$ , fisura nu se va propaga. Pentru o lungime a fisurii  $a > a_c$  fisura se poate propaga într-un mod catastrofal.

O ilustrare a aplicării criteriului lui Griffith în cazul deformațiilor impuse a fost demonstrată experimental și prezentată de Obreimoff [202], *figura 3.4*.



**Fig. 3.4.** Clivajul unei lamele de mică

Forța  $F$  nu furnizează lucru mecanic ( $dU=0$ ) atunci când fisura se deplasează după un plan perpendicular pe direcția forței. Curba din *figura 3.5* reprezintă variația energiei în funcție de lungimea fisurii fiind caracterizată de un punct de minim.

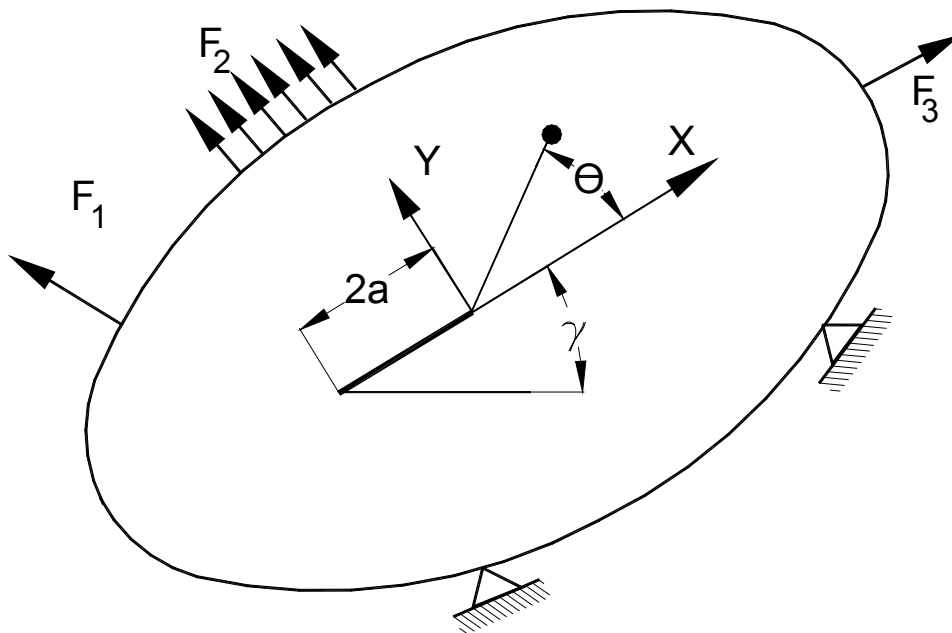


**Fig. 3.5.** Variația energiei în raport cu lungimea fisurii

Fisura este stabilă atunci când mărimea sa inițială este mai mică decât  $a_c$ . În acest exemplu ruperea este controlată: fisura progresa în material pe măsură ce pana avansează.

### 3.4. Energia potențială liberă și variația acesteia în funcție de compliantă

Pentru ca o fisură să se poată propaga, trebuie să furnizăm materialului o energie suplimentară în vederea creșterii suprafeței fisurate – energia superficială + (eventual) energia pentru deformare plastică. Considerăm un solid ce conține o fisură de lungime  $2a$ . Energia mecanică sau energia potențială totală a sistemului este egală cu  $(W_e - L)$ ,  $W_e$  fiind energia elastică de deformare iar  $L$  este lucrul mecanic al sarcinilor exterioare. Dacă fisura crește cu  $da$ , figura 3.6, energia potențială scade cu  $d(W_e - L)$ .



**Fig. 3.6.** Solid străpuns de o fisură

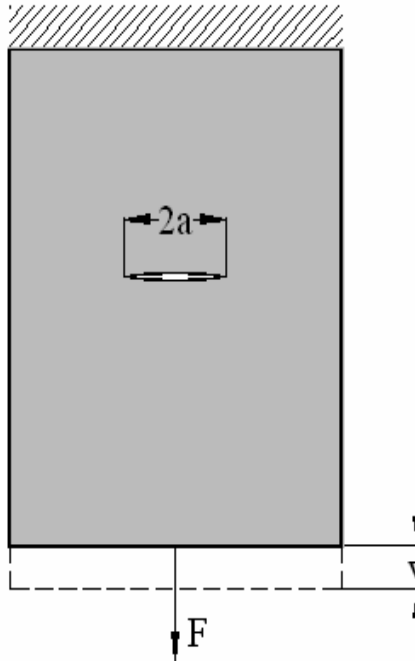


Se definește  $G$  ca fiind energia potențială totală liberă pe unitatea de suprafață nou formată ca urmare a propagării fisurii. Dacă solidul respectiv se consideră a fi o placă de grosime egală cu unitatea, vom avea:

$$G = -\frac{d(W_e - L)}{da} = \frac{d(L - W_e)}{da} \quad (3.22)$$

în care  $G$  este energia disponibilă pentru a face ca fisura să avanseze sau energia potențială eliberată sau „forța” de extensie a fisurii. Fisura se va propaga brusc atunci când  $G$  atinge o valoare critică  $G_c$ . În cazul materialelor foarte fragile  $G_c$  este egal cu de două ori energia superficială:  $G_c = 2\gamma_s$ . Pentru materialele ductile,  $G$  include termenul energetic datorat deformației plastice localizate la vârful fisurii, sistemul având o comportare elastică în ansamblu. Termenul  $G_c$  poate cuprinde de asemenea și alți termeni ai energiei disipate prin propagarea fisurii.

Considerăm o placă de grosime egală cu unitatea, ce conține o fisură străpunsă, supusă la tracțiune de către forța  $F$ , *figura 3.7*.



**Fig. 3.7.** Placă străpunsă de o fisură centrală

Aplicarea acestei solicitări antrenează deplasarea punctului de aplicație al forței cu  $v$ . Presupunând că are loc o propagare a fisurii cu  $da$ , aria acesteia crește cu  $dA$  iar  $v$  și  $F$  variază cu  $dv$  respectiv  $dF$ . În aceste condiții, variația lucrului mecanic al sarcinilor exterioare,  $dL$ , este egal cu  $(F \cdot dv)$  iar variația energiei elastice a sistemului,  $dW_e$ , este egală cu  $d\left(\frac{1}{2} Fv\right)$ . Conform relației (3.22) vom avea:

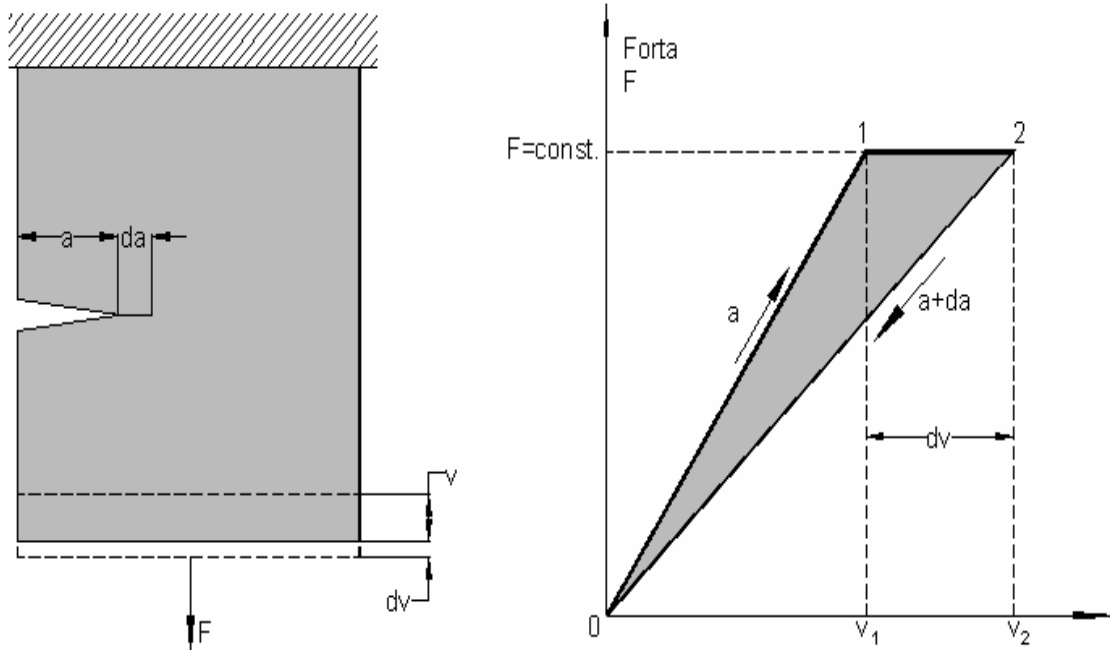
$$Gda = dL - dW_e = Fdv - d\left(\frac{1}{2} Fv\right) \quad (3.23)$$

În această relație nu există termenii corespunzători unei deformații plastice deoarece nu există deformații plastice în ansamblul plăcii. Termenul  $(G \cdot da)$  poate include întreaga energie de la vârful fisurii (superficială, de deformație plastică, etc.).

Vom examina două cazuri de încărcare: atunci când forța  $F$  rămâne constantă în timpul propagării fisurii și atunci când deplasarea  $v$  a punctelor sale de aplicație rămâne constantă.

A. Solicitare la încărcare constantă ( $F=\text{const.}$ ), atunci când fisura se propagă cu  $da$ , iar punctul de aplicație al forței se deplasează cu  $dv$ , figura 3.8.

Pentru o mașină infinit moale este impusă încărcarea. Atât timp cât fisura nu se propagă, deplasarea  $v$  este proporțională cu  $F$  deoarece ne aflăm în domeniul elastic. Presupunem că la încărcarea  $F=\text{const.}$  lungimea fisurii crește rapid cu  $da$ , figura 3.8.



**Fig. 3.8.** Curbele de solicitare pentru fisurile de lungime  $a$  și  $(a+da)$

Atunci când fisura crește cu  $da$  placa se alungește cu  $dv$  – de la  $v_1$  la  $v_2$  la forță constantă. Considerăm bilanțul energetic dat de relația (3.23). În cazul propagării fisurii energia elastică a sistemului variază cu:

$$dW_e = \frac{1}{2} d(Fv) = \frac{1}{2} (v dF + F dv)$$

Intrucât  $v \cdot dF \approx 0$  va rezulta:

$$dW_e = \frac{1}{2} F dv$$

Se definește complianța epuvetei fisurate  $C(a)$  care depinde de lungimea fisurii prin relația:

$$C(a) = \frac{v(a)}{F(a)} \quad (3.24)$$

Complianța reprezintă inversa pantei dreptei 0-1. Astfel, vom avea:

$$dW_e = \frac{1}{2} F dv = \frac{1}{2} F d(C \cdot F) = \frac{1}{2} F \left( \frac{\partial C}{\partial a} F + \frac{\partial F}{\partial a} C \right) da$$

Deoarece  $F=\text{const.}$  rezultă că  $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$  și ca urmare:

$$dW_e = \frac{1}{2} F^2 \frac{\partial C}{\partial a} da \quad (3.25)$$

Atunci când are loc propagarea fisurii, variația lucrului mecanic al forțelor exterioare va fi:

$$dL = Fdv = F^2 \frac{\partial C}{\partial a} da$$

Având în vedere ultimile două relații și utilizând relația (3.23) se deduce:

$$Gda = \frac{1}{2} F^2 \frac{\partial C}{\partial a} da$$

în care  $G \cdot da$  reprezintă aria hașurată 0-1-2-0 din figura 3.8.

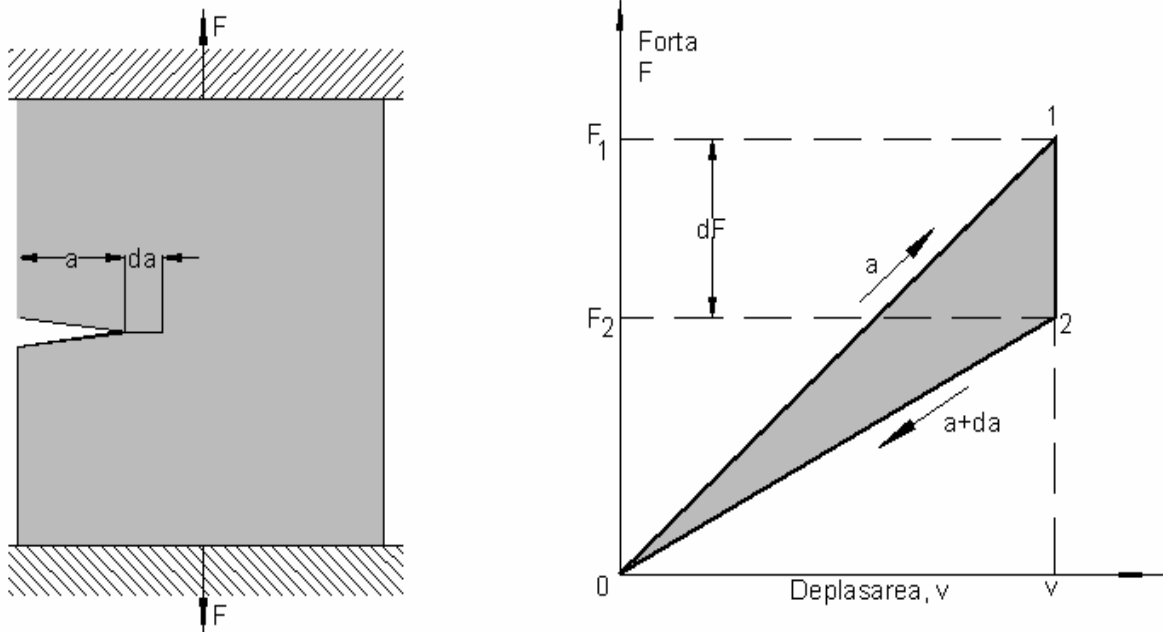
Ca urmare, energia disponibilă pentru a face ca fisura să se propage va fi dată de relația:

$$G = \frac{1}{2} F^2 \frac{\partial C}{\partial a} \quad (3.26)$$

Astfel, la încărcare constantă energia elastică a sistemului crește dar lucrul mecanic al forțelor exterioare trebuie să aibe o valoare astfel încât variația totală a energiei potențiale  $d(-L + W_e)$  să reprezinte o diminuare. Altfel spus, lucrul mecanic efectuat de sarcinile exterioare este utilizat, jumătate pentru creșterea energiei elastice a sistemului,  $W_e$ , cealaltă jumătate fiind furnizat pentru a face să avanseze fisura,  $(G \cdot da)$ .

B. Solicitare în condiții de deformare impusă – mașină infinit „dură” sau cu bacurile de prindere fixe

Pentru o mașină la care deplasarea  $v$  este constantă ( $dv=0$ ), deformarea (sau alungirea) este impusă. În acest caz, atunci când fisura crește rapid cu  $da$ , figura 3.9, forța scade de la valoarea  $F_1$  la  $F_2$  (de la punctul 1 la punctul 2).



**Fig. 3.9. Evoluția sistemului la deplasare impusă**

Lucrul mecanic al sarcinilor exterioare este egal cu zero:  $L = F \cdot dv = 0$ , iar energia elastică a sistemului scade tocmai datorită propagării fisurii:

$$dW_e = \frac{1}{2} d(Fv) = \frac{1}{2} (vdF + Fdv)$$

Intrucât  $Fdv = 0$  va rezulta:

$$dW_e = \frac{1}{2}(v dF)$$

Tinând cont de relația (3.24) vom avea:

$$dF = d\left[\frac{v(a)}{C(a)}\right] = \left(\frac{1}{C} \frac{\partial v}{\partial a} - \frac{v}{C^2} \frac{\partial C}{\partial a}\right) da = -\frac{v}{C^2} \frac{\partial C}{\partial a} da \text{ întrucât } \frac{\partial v}{\partial a} = 0$$

Așadar va rezulta:

$$dW_e = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial a} da$$

și întrucât  $v=F \cdot C$  vom avea:

$$dW_e = -\frac{1}{2} F^2 \frac{\partial C}{\partial a} da$$

Tinând cont de relația (3.23) va rezulta:

$$G da = dL - dW_e = -\frac{1}{2} F^2 \frac{\partial C}{\partial a} da \text{ întrucât } dL=0$$

și ca urmare:

$$G = \frac{1}{2} F^2 \frac{\partial C}{\partial a}$$

regăsindu-se expresia (3.27) a energiei disponibile pentru propagarea fisurii în cazul solicitării cu încărcare constantă.

Astfel, la deformare impusă, ca urmare a solicitării exterioare cu forța  $F$ , în placă se stochează o anumită energie elastică. Fără ca lucrul mecanic exterior să varieze, respectiva energie elastică stocată scade cu o anumită cantitate care este utilizată pentru propagarea fisurii. Termenul ( $G \cdot da$ ), în cazul solicitării la deformare impusă, este reprezentat de aria hașurată 0-1-2-0 din figura 3.9.

Observații.

1. Pentru o placă de grosime  $b$  se poate scrie:

$$G \cdot b \cdot da = dL - dW_e$$

adică:

$$G = \frac{1}{2} \frac{F^2}{b} \frac{\partial C}{\partial a} \quad (3.27)$$

2. Se poate exprima  $G$  și în funcție de rigiditatea  $k$  a sistemului (pentru o placă cu  $b=1$ ):

$$k = \frac{F}{v} = \frac{1}{C}$$

$$G = \frac{1}{2} F^2 \frac{\partial C}{\partial a} = \frac{1}{2} F^2 \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{k} \right) = -\frac{1}{2k^2} F^2 \frac{\partial k}{\partial a} = -\frac{v^2}{2} \frac{\partial k}{\partial a}$$

S-a constatat faptul că  $G$  este independent de modul de propagare a fisurii: la încărcare constantă sau la deformare impusă. Ca urmare:

$$G = \frac{1}{2} F^2 \frac{\partial C}{\partial a} = \left( \frac{\partial W_e}{\partial a} \right)_{F=\text{const.}} = - \left( \frac{\partial W_e}{\partial a} \right)_{v=\text{const.}}$$

În cele două cazuri  $G$  este egală cu derivata energiei elastice cu semn schimbat, în cazul în care  $v=\text{const.}$ , întrucât  $W_e$  crește la încărcare constantă și scade la deplasare constantă. Așadar, la încărcare constantă energia pentru propagarea fisurii se bazează pe creșterea lucrului mecanic exterior  $\left( \frac{1}{2} F dv \right)$ , crescând în același timp și

energia elastică acumulată în placă. La deplasare constantă (deformații impuse) energia pentru propagarea fisurii se bazează pe diminuarea energiei elastice acumulate în placă anterior ca urmare a solicitării cu forța  $F$ .

$G$  nu depinde de constantele elastice ale materialului sau de geometria epruvetei utilizate dar depinde de modul în care sistemul va evolua ulterior, prin complianța  $C$ .

### 3.5. Măsurarea $G_c$ prin metoda complianței

Termenul  $(G \cdot da)$  reprezintă energia disponibilă pentru mărirea fisurii cu  $da$ . Pentru ca fisura să se poată propaga trebuie ca  $G$  să atingă valoarea critică  $G_c$  sau ca încărcarea să atingă o valoare critică astfel încât aria 0-1-2-0 să fie egală cu  $G_c da$ .

$G_c$  se poate determina utilizând relația (3.27), cu condiția de a cunoaște variația complianței în funcție de lungimea fisurii, respectiv termenul  $\frac{\partial C}{\partial a}$ . Pentru a determina funcția  $C(a)$  este suficient să determinăm variația  $F(v)$  pentru mai multe epruvete cu aceeași configurație generală, diferențiindu-se doar prin lungimea fisurii.

Pentru fiecare din probele 1, 2, ..., i, ..., n se vor măsura lungimile corespunzătoare ale fisurilor, respectiv  $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$ . Fiecare probă se caracterizează printr-o anumită complianță dată de relația  $C = \frac{v}{F}$  în care  $v$  reprezintă deplasarea punctelor de aplicație ale forței  $F$ . Fiecare probă având fisuri cu lungimile  $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$  se supune la tracțiune în domeniul liniar elastic obținându-se dependența  $F(v)$ , figura 3.10a.

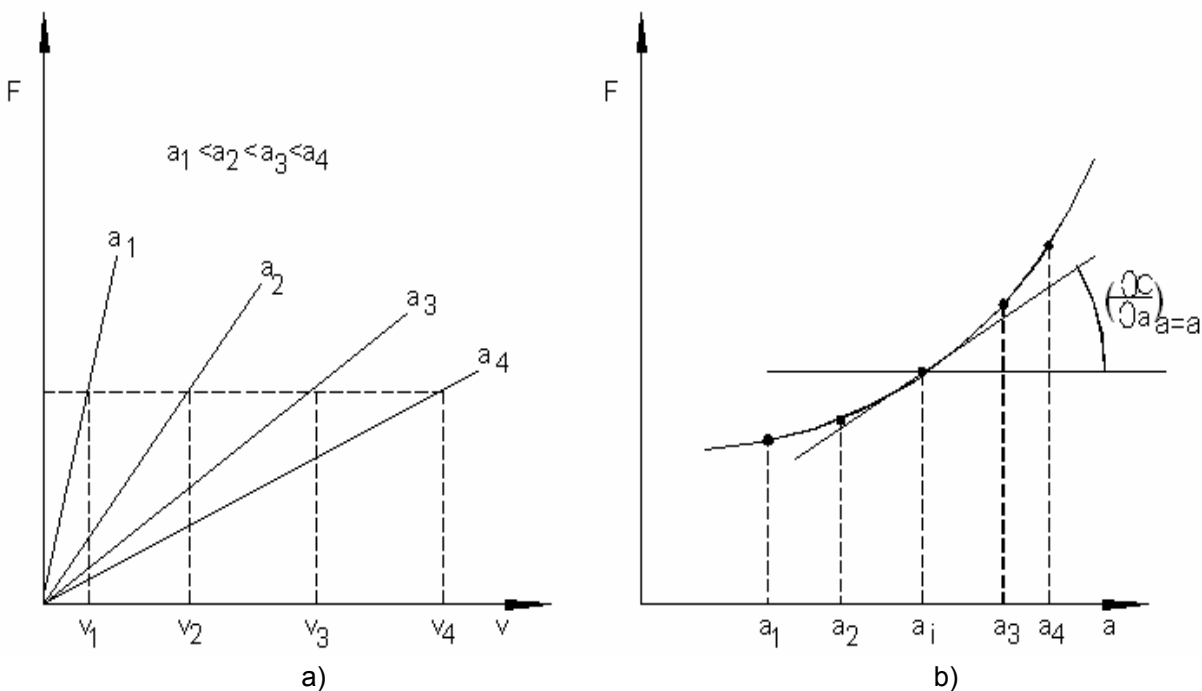


Fig. 3.10. Determinarea  $G_c$  cu ajutorul complianței

Pentru fiecare probă cu lungimea fisurii  $a_i$ , prin raportul  $\frac{v}{F}$  se obține dependența  $C(a)$ , figura 3.10b. Pentru o probă cu lungimea fisurii intermediară,  $a_1 > a_i > a_n$ , se determină  $\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_{a=a_i}$  reprezentat grafic în figura 3.10b. Aceeași probă cu lungimea fisurii

$a_i$  se supune la tracțiune până la rupere obținându-se forța critică  $F_c$  care a dus la distrugere. Introducând valorile obținute pentru  $\left(\frac{\partial C}{\partial a}\right)_{a=a_i}$  și  $F_c$  în relația (3.27) se obține valoarea critică  $G_c$  a energiei disponibile pentru ca fisura existentă să se propage și să se transforme într-o fisură instabilă.

### 3.6. Rezistența la fisurare $R$ și „forța” de propagare a fisurii $G$

Condiția de instabilitate în propagarea unei fisuri poate fi analizată pe baza curbelor  $R$  și  $G$ . Având în vedere relațiile (3.15) și (3.20), pentru energia  $G$  disponibilă în vederea propagării fisurii, avem relația:

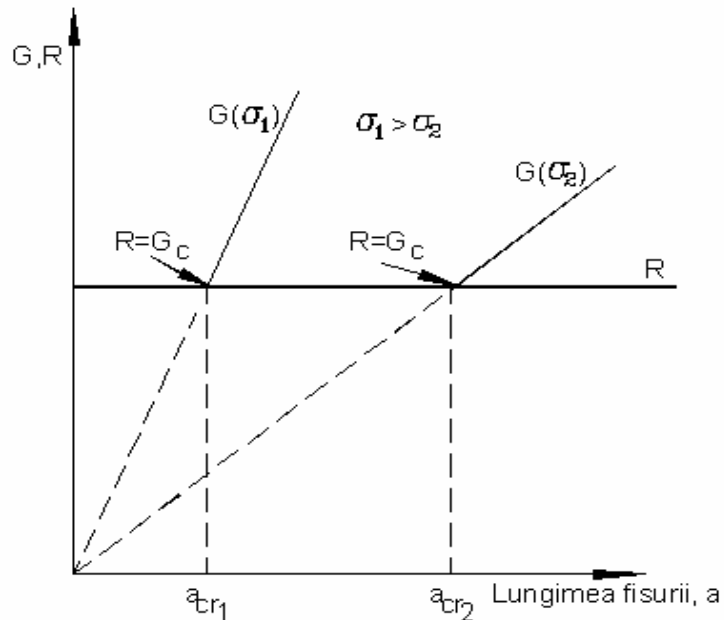
$$G = \frac{2\pi\sigma^2 a}{E} - \text{pentru starea plană de tensiune} \quad (3.28)$$

$$G = 2(1-\nu^2)\frac{\pi\sigma^2 a}{E} - \text{pentru starea plană de deformare} \quad (3.29)$$

Dacă avem un material ce are disponibilități (limitate) de deformare plastică, rezistența la fisurare este dată de:

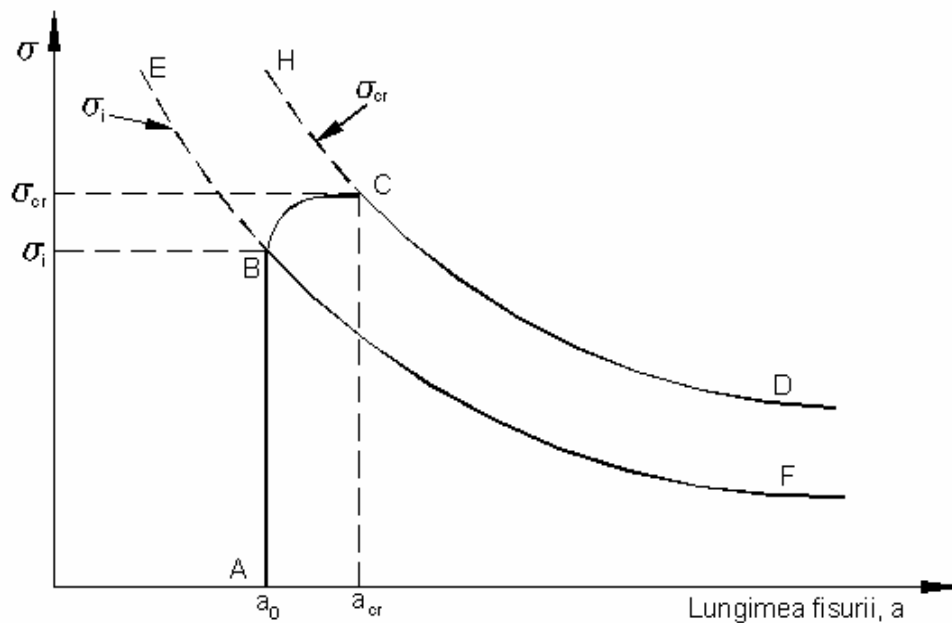
$$R = \gamma_s + \gamma_p \quad (3.30)$$

În figura 3.11 este indicat modul de determinare a lungimii critice a fisurii pentru care propagarea acesteia devine instabilă la diferite valori ale tensiunii  $\sigma$  în condițiile stării plane de deformare. Curbele  $G$  pentru diferite valori ale lui  $\sigma$  sunt drepte ale căror ecuații sunt date de relația (3.29), iar curba  $R$  este o dreaptă paralelă cu axa absciselor.



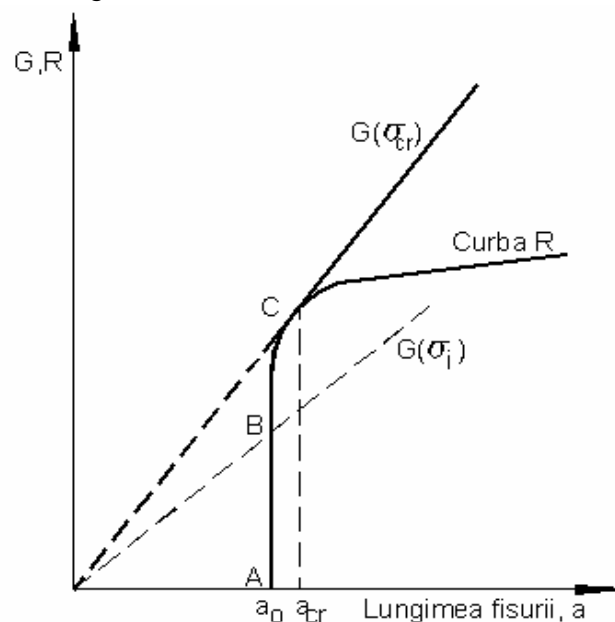
**Fig. 3.11.** Curbele  $G$  și  $R$

Porțiunile dreptelor trasate cu linie întreruptă nu interesează deoarece acestea corespund unor forțe de propagare a fisurii mai mici decât rezistența la fisurare. Se constată faptul că, dacă tensiunea  $\sigma$  aplicată crește, lungimea fisurii  $a_c$ , la care propagarea devine instabilă, scade. În condițiile stării plane de tensiune trebuie avut în vedere faptul că există o anumită tensiune  $\sigma_i$  care, aplicată plăcii, face ca fisura să înceapă să se extindă și o tensiune critică  $\sigma_c$  de la care propagarea devine instabilă, figura 3.12, curba ABCD.



**Fig. 3.12.** Propagarea fisurii în cazul stării plane de deformare

Evident că  $\sigma_i$  și  $\sigma_c$  scad pe măsură ce lungimea inițială a fisurii crește, curbele EBF și HCD. Atât timp cât tensiunea aplicată plăcii este mai mică decât  $\sigma_i$ , fisura inițială de lungime  $a_0$  se deschide fără să se extindă, porțiunea AB. În momentul depășirii tensiunii  $\sigma_i$  fisura începe să se propage stabil – porțiunea BC. Dacă pe această porțiune tensiunea se menține constantă fisura nu se mai propagă în continuare. Creșterea stabilă a fisurii, de lungime inițială  $a_0$ , continuă până la atingerea tensiunii critice  $\sigma_c$  căreia îi corespunde lungimea critică  $a_c$  și care, dacă este atinsă, conduce la propagarea instabilă a fisurii. Ca urmare instabilitatea este precedată de o perioadă foarte scurtă când fisura prezintă o creștere lentă, stabilă, atunci când în placă este predominantă starea plană de tensiune. Curbele  $G$  și  $R$  pentru starea plană de tensiune sunt cele prezentate în figura 3.13.

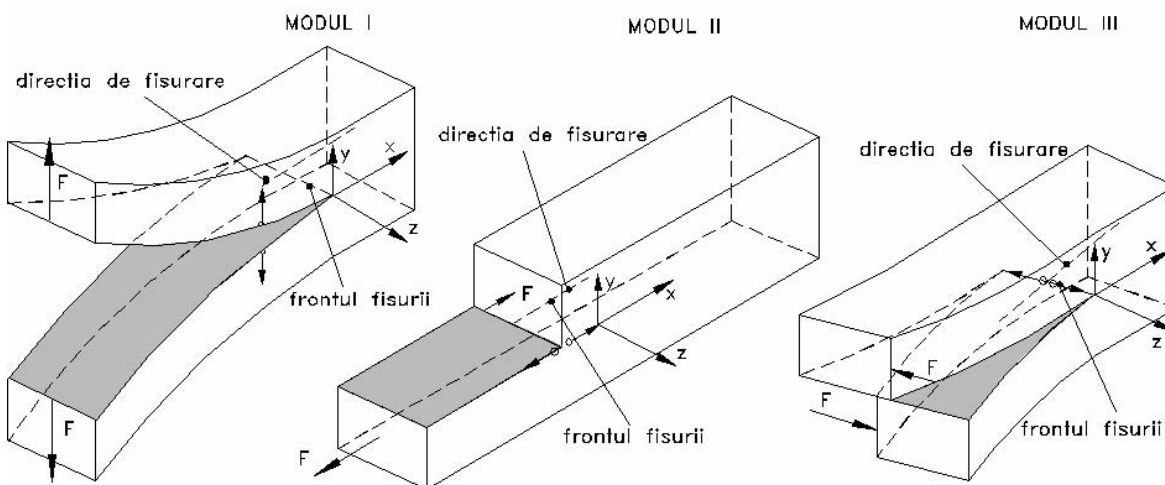


**Fig. 3.13.** Propagarea fisurii în cazul stării plane de tensiune

Pe porțiunea AB curba  $R$  apare sub forma unei drepte paralelă cu axa ordonatelor deoarece fisura nu se extinde din cauza nivelului redus al tensiunii aplicate ( $G$  are valoare mică). După depășirea tensiunii  $\sigma_i$  fisura se propagă stabil până la atingerea tensiunii  $\sigma_c$  când are loc propagarea instabilă – porțiunea BC. Condiția de instabilitate impune nu numai ca  $G_c \geq R$  dar și condiția de egalitate a unghiurilor de inclinare a curbelor  $G$  și  $R$  în punctul C  $\left(\frac{\partial G}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial a}\right)$ .

### 3.7. Moduri de solicitare – moduri de rupere

În funcție de deplasarea relativă a suprafețelor de rupere situate de o parte și de alta a planului în care se extinde fisura, propagarea acesteia se poate face în modurile indicate în *figura 3.14*. În mod obișnuit se consideră trei moduri fundamentale de solicitare care în final vor conduce la rupere, modul I, modul II și modul III. Celelalte moduri de solicitare se deduc prin combinații liniare ale acestora. *Figura 3.14* prezintă diferite moduri de încărcare a unei fisuri. În modul I, *figura 3.14a*, fisura se extinde prin deschidere ca urmare a deplasării punctelor de pe suprafața fisurii după o direcție perpendiculară pe planul acesteia. Forțele care duc la deschiderea fisurii sunt perpendiculare pe planul format de frontul fisurii și direcția de fisurare. În modul II, *figura 3.14b*, fisura se extinde prin alunecare plană. Deplasările punctelor de pe suprafața fisurii au loc în planul acesteia, perpendicular pe frontul fisurii și în sensul de înaintare al fisurii. Forțele care produc alunecarea sunt paralele cu direcția de fisurare. În modul III, *figura 3.14c*, fisura se extinde prin alunecare laterală. Deplasările punctelor de pe suprafața fisurată au loc în planul fisurii, paralel cu frontul acesteia. Forțele care produc alunecarea sunt perpendiculare pe direcția de înaintare.



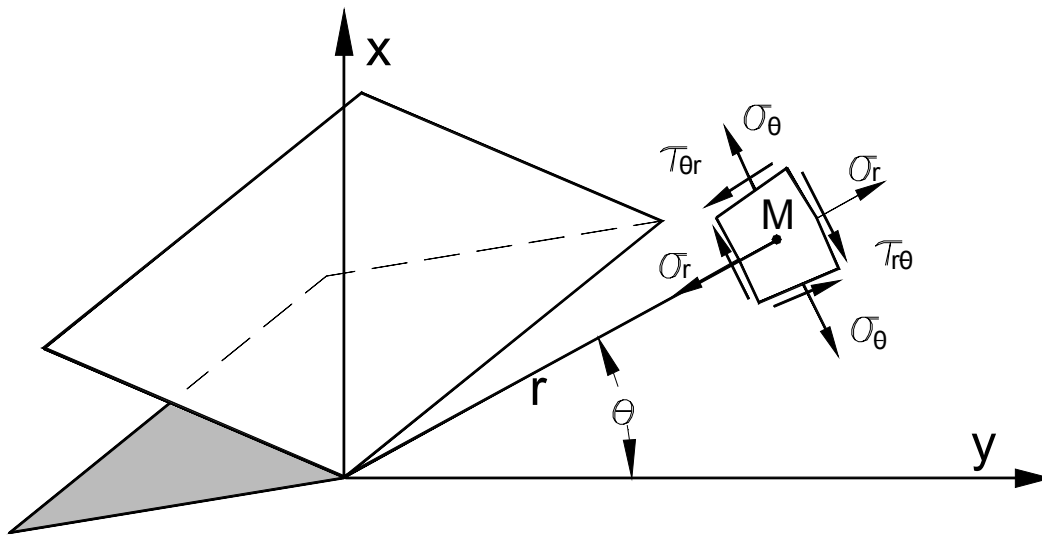
**Fig. 3.14.** Moduri fundamentale de rupere

În ceea ce privește extensia unei microfisuri pentru dezvoltarea unei rupei fragile, cel mai critic mod de propagare este modul I. În consecință, pentru o dimensiune dată a defectului, riscul de rupere brutală este mai mare dacă orientarea defectului în raport cu solicitarea exterioară corespunde modului I.

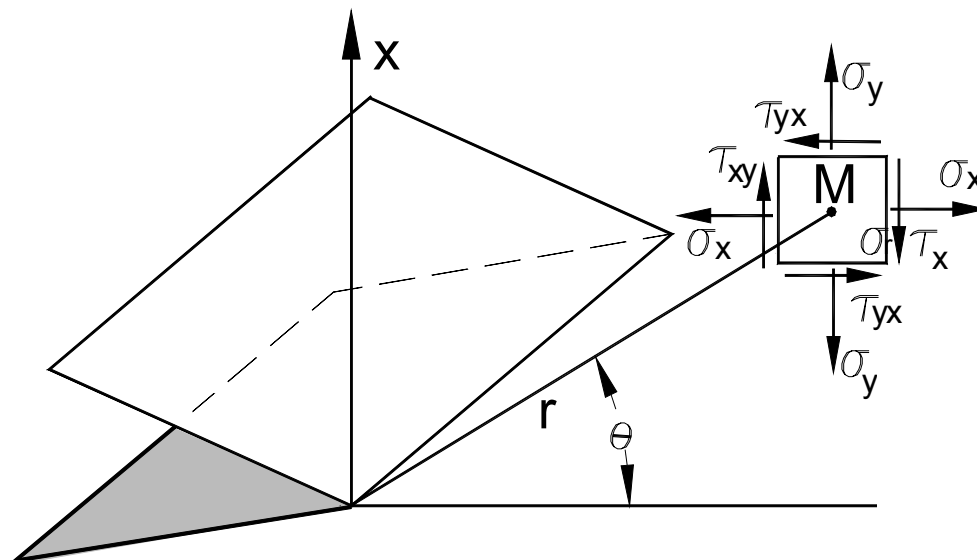


### 3.8. Analiza Irwin privind starea de tensiune și deformăție din vecinătatea unei fisuri

În cadrul bilanțului energetic dat de Griffith, Irwin a substituit o aproximare locală bazată pe câmpul tensiunilor existent în jurul unei fisuri. Problema ce trebuie rezolvată este aceea de a calcula energia disponibilă și necesară pentru ca o fisură de semilungime  $a$  să avanseze pe distanța  $da$ . Irwin consideră la vârful fisurii o regiune suficient de mică în raport cu solidul respectiv dar suficient de mare în raport cu dimensiunile atomice, în acord cu teoria elasticității liniare, *figura 3.15a*. Originea sistemului de coordonate se află la vârful fisurii, punctul M în care se determină tensiunile fiind de coordonate polare  $r$  și  $\theta$  în care  $r \ll a$ .



a) tensiuni în coordonate polare



b) tensiuni în coordonate carteziene

**Fig. 3.15.** Câmpul de tensiuni din imediata vecinătate a unei fisuri

Fisura se consideră a fi plană cu extremitățile ascuțite. Fie un element de arie în jurul punctului M aflat la distanța  $r$  de vârful fisurii și sub unghiul  $\theta$  în raport cu planul acesteia, *figura 3.15b*.

### 3.8.1. Calculul tensiunilor

Ca urmare a solicitării exterioare cu tensiunea monoaxială  $\sigma$ , elementul de arie este supus la tensiunile normale  $\sigma_x$  și  $\sigma_y$  și tensiunea tangențială  $\tau_{xy}$ .

Pentru rezolvarea unei asemenea probleme de elasticitate plană se pornește de la ecuațiile de echilibru:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (3.31)$$

și condiția de compatibilitate care leagă deformațiile specifice din plane diferite:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.32)$$

Dacă avem în vedere legea lui Hooke pentru starea plană de tensiune:

$$E\epsilon_x = \sigma_x - \nu\sigma_y$$

$$E\epsilon_y = \sigma_y - \nu\sigma_x$$

$$G\gamma_{xy} = \tau_{xy}$$

relația dintre constantele elastice  $E$ ,  $G$  și  $\nu$ :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

și ecuațiile de echilibru (3.32), condiția de compatibilitate devine:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (3.33)$$

care mai poate fi scrisă sub forma:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (3.34)$$

ecuație cunoscută din teoria elasticității sub denumirea de condiția lui Levy.

Componentele tensorului tensiunilor se pot exprima cu ajutorul funcției de tensiune  $\Psi(x,y)$  sau funcția Airy, sub forma:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \quad (3.35)$$

Făcând derivatele parțiale și înlocuind în relația (3.33) se obține:

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = 0 \quad (3.36)$$

care mai poate fi scrisă sub forma:

$$\nabla^4 \Psi = \nabla^2(\nabla^2 \Psi) = 0 \quad (3.37)$$

Pentru o placă infinită cu fisură centrală supusă la solicitări biaxiale, Westergaard a introdus funcția de tensiune sub forma:

$$\Psi(x, y) = \operatorname{Re} \bar{\Phi}(z) + y \operatorname{Im} \bar{\Phi}(z) \quad (3.38)$$

în care:

- $\Phi(z)$  este o funcție de variabilă complexă  $z=x+iy$ ;
- $\overline{\Phi}(z)$  și  $\overline{\overline{\Phi}}(z)$  sunt integrale de ordinul I și II ale funcției de variabilă complexă  $\Phi(z)$  care se exprimă astfel:

$$\Phi(z) = \frac{d}{dz} \overline{\Phi}(z); \quad \overline{\Phi}(z) = \frac{d}{dz} \overline{\overline{\Phi}}(z); \quad \Phi'(z) = \frac{d}{dz} \Phi(z)$$

În aceste condiții va rezulta:

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} = \operatorname{Re} \Phi''(z) + y \operatorname{Im} \Phi'''(z);$$

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = \operatorname{Re} \Phi''(z) - 4i \operatorname{Im} \Phi''(z) + y \operatorname{Im} \Phi'''(z);$$

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\operatorname{Re} \Phi''(z) + 2i \operatorname{Im} \Phi''(z) - y \operatorname{Im} \Phi'''(z);$$

Pe baza acestor relații se constată faptul că funcția dată de ecuația (3.38) satisface ecuația (3.37) ca urmare funcția considerată este o funcție Airy.

Pentru rezolvarea acestei probleme trebuie să facem apel în continuare la ecuațiile Cauchy-Rieman:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\operatorname{Re} \Phi(z))}{\partial x} &= \frac{\partial(\operatorname{Im} \Phi(z))}{\partial y} \\ \frac{\partial(\operatorname{Re} \Phi(z))}{\partial y} &= -\frac{\partial(\operatorname{Im} \Phi(z))}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Dacă efectuăm derivatele parțiale ale funcției  $\Psi(x,y)$  și avem în vedere condițiile Cauchy-Rieman se obține:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (\operatorname{Re} \overline{\Phi}(z))}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (y \operatorname{Im} \overline{\Phi}(z))}{\partial y^2} \quad (3.40)$$

Primul membru al relației (3.40) va fi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\operatorname{Re} \overline{\Phi}(z))}{\partial y} &= \frac{\partial(\operatorname{Re} \overline{\Phi}(z))}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = i \operatorname{Re} \overline{\Phi}(z) \\ \frac{\partial^2 (\operatorname{Re} \overline{\Phi}(z))}{\partial y^2} &= i \frac{\partial(\operatorname{Re} \overline{\Phi}(z))}{\partial y} = \frac{\partial(\operatorname{Re} \overline{\Phi}(z))}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = i^2 \operatorname{Re} \overline{\Phi}(z) = -\operatorname{Re} \overline{\Phi}(z) \end{aligned} \quad (3.41)$$

În mod analog, al doilea termen al relației (3.40) se va calcula astfel:

$$\frac{\partial(y \operatorname{Im} \overline{\Phi}(z))}{\partial y} = \operatorname{Im} \overline{\Phi}(z) + y \frac{\partial(\operatorname{Im} \overline{\Phi}(z))}{\partial y}$$

de unde rezultă:

$$\frac{\partial^2 (y \operatorname{Im} \overline{\Phi}(z))}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial(\operatorname{Im} \overline{\Phi}(z))}{\partial y} + y \frac{\partial^2 (\operatorname{Im} \overline{\Phi}(z))}{\partial y^2} \quad (3.42)$$

Dacă ținem cont de condițiile Cauchy-Rieman, din ecuația (3.39) se deduce primul termen din partea stângă a relației (3.42):

$$\frac{\partial(\operatorname{Im} \overline{\Phi}(z))}{\partial y} = \frac{\partial(\operatorname{Re} \overline{\Phi}(z))}{\partial x} = \frac{\partial(\operatorname{Re} \overline{\Phi}(z))}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

de unde va rezulta:

$$\frac{\partial(\operatorname{Im} \overline{\Phi}(z))}{\partial y} = \operatorname{Re} \overline{\Phi}(z) \quad (3.43)$$

Cel de-al doilea termen va fi dedus astfel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\operatorname{Im}\bar{\Phi}(z))}{\partial y} &= \frac{\partial(\operatorname{Im}\bar{\Phi}(z))}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = i \operatorname{Im}\Phi(z) \\ \frac{\partial^2(\operatorname{Im}\bar{\Phi}(z))}{\partial y^2} &= y \cdot i \frac{\partial(\operatorname{Im}\Phi(z))}{\partial y} = y \cdot i \frac{\partial(\operatorname{Im}\Phi(z))}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = y \cdot i^2 \operatorname{Im}\Phi'(z) = -y \operatorname{Im}\Phi'(z)\end{aligned}\quad (3.44)$$

Înlocuind relațiile (3.43) și (3.44) în (3.42) se obține:

$$\frac{\partial^2(y \operatorname{Im}\bar{\Phi}(z))}{\partial y^2} = 2 \operatorname{Re}\Phi(z) - y \operatorname{Im}\Phi'(z) \quad (3.45)$$

Din relațiile (3.41) și (3.45) rezultă expresia tensiunii  $\sigma_x$ :

$$\sigma_x = \operatorname{Re}\Phi(z) - y \operatorname{Im}\Phi'(z) \quad (3.46)$$

În mod analog se poate calcula și tensiunea  $\sigma_y$ :

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\operatorname{Re}\bar{\Phi}(z))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(y \operatorname{Im}\bar{\Phi}(z))}{\partial x^2}$$

Primul termen din a doua parte a relației de mai sus se calculează astfel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\operatorname{Re}\bar{\Phi}(z))}{\partial x} &= \frac{\partial(\operatorname{Re}\bar{\Phi}(z))}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{Re}\bar{\Phi}(z) \\ \frac{\partial^2(\operatorname{Re}\bar{\Phi}(z))}{\partial x^2} &= \frac{\partial(\operatorname{Re}\bar{\Phi}(z))}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{Re}\Phi(z)\end{aligned}\quad (3.47)$$

Cel de-al doilea termen se deduce astfel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\operatorname{Im}\bar{\Phi}(z))}{\partial x} &= y \frac{\partial(\operatorname{Im}\bar{\Phi}(z))}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = y \operatorname{Im}\Phi(z) \\ \frac{\partial^2(y \operatorname{Im}\bar{\Phi}(z))}{\partial x^2} &= y \cdot \frac{\partial(\operatorname{Im}\Phi(z))}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \operatorname{Im}\Phi'(z)\end{aligned}\quad (3.48)$$

Din relațiile (3.47) și (3.48) rezultă expresia tensiunii  $\sigma_y$ :

$$\sigma_y = \operatorname{Re}\Phi(z) + y \operatorname{Im}\Phi'(z) \quad (3.49)$$

Tensiunea tangențială  $\tau_{xy}$  are expresia:

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \quad (3.50)$$

Din relația (3.38) deducem:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial(\operatorname{Re}\bar{\Phi}(z))}{\partial y} + \frac{\partial(y \operatorname{Im}\bar{\Phi}(z))}{\partial y} = \frac{\partial(\operatorname{Re}\bar{\Phi}(z))}{\partial y} + \operatorname{Im}\bar{\Phi}(z) + y \frac{\partial(\operatorname{Im}\bar{\Phi}(z))}{\partial y} \quad (3.51)$$

Dacă se aplică relațiile Cauchy-Rieman (3.39) se obține:

$$\frac{\partial(\operatorname{Re}\bar{\Phi}(z))}{\partial y} = -\frac{\partial(\operatorname{Im}\Phi(z))}{\partial x}$$

În aceste condiții relația (3.51) devine:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial(\operatorname{Im}\Phi(z))}{\partial x} + \operatorname{Im}\bar{\Phi}(z) + y \frac{\partial(\operatorname{Im}\bar{\Phi}(z))}{\partial y} = i \cdot y \operatorname{Im}\Phi(z) \quad (3.52)$$

Derivând parțial în raport cu x relația (3.52) se obține:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = i \cdot y \frac{\partial(\operatorname{Im}\Phi(z))}{\partial x} = -i \cdot y \frac{\partial(\operatorname{Re}\Phi(z))}{\partial y} = -i^2 y \operatorname{Re}\Phi'(z) = y \operatorname{Re}\Phi'(z)$$

În aceste condiții, pentru tensiunea tangențială dată de relația (3.50) se obține expresia:

$$\tau_{xy} = -y \operatorname{Re} \Phi'(z) \quad (3.53)$$

Ca urmare, pentru tensiunile din jurul punctului  $M$  s-au obținut soluțiile generale:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} \Phi(z) - y \operatorname{Im} \Phi'(z) \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} \Phi(z) + y \operatorname{Im} \Phi'(z) \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} \Phi'(z) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Pentru problema analizată, funcția  $\Phi(z)$  trebuie să îndeplinească unele condiții de contur. Pentru o placă de dimensiuni infinite în raport cu mărimea fisurii, cu fisură solicitată monoaxial prin tensiunile  $\sigma$ , condițiile la limită sunt:

- pentru  $-a < x < a$  și  $y=0 \rightarrow \sigma_y=0$ ;
- pentru  $y=\pm\infty \rightarrow \sigma_y=\sigma$ ;
- pentru  $x=\pm a \rightarrow \sigma_y=\infty$  (condiția de singularitate).

Un exemplu de funcție care satisface aceste condiții este de forma:

$$\Phi(z) = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{z^2}}} \quad (3.55)$$

Având în vedere relațiile (3.54), pentru  $y=0$  rezultă  $\sigma_y = \operatorname{Re} \Phi(z)$ . Dacă se are în vedere relația (3.55) și faptul că  $z=x+iy$ , vom avea:

$$\operatorname{Re} \Phi(z) = \frac{\sigma x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Pe baza acestei relații este evident faptul că pentru  $-a < x < a$ ,  $\operatorname{Re} \Phi(z) = 0$  și ca urmare prima condiție este îndeplinită.

Atunci când  $z \rightarrow \infty$ , tot din relația (3.55) se deduce că  $\Phi(z) = \sigma$ .

Pentru  $z=\pm a$  din relația (3.55) se constată faptul că este îndeplinită condiția de singularitate. Sistemul de axe, inițial cu originea în centrul fisurii se deplasează în vârful acesteia și ca urmare este necesară introducerea unei noi variabile cu ajutorul căreia să se facă această translație:

$$\eta = z - a$$

În aceste condiții  $\Phi(z)$  devine:

$$\Phi(\eta) = \frac{\sigma(a + \eta)}{\sqrt{(a + \eta)^2 - a^2}} \quad (3.56)$$

Intrucât  $\eta \ll a$ , într-o primă aproximație relația de mai sus devine:

$$\Phi(\eta) \approx \sigma \sqrt{\frac{a}{2\eta}} \quad (3.57)$$

Trecând de la sistemul de axe cartezian, *figura 3.15a*, cu originea în vârful fisurii la cel polar, *figura 3.15b*, se face următoarea schimbare de variabilă:

$$\eta = r \cdot e^{i\theta} \quad (3.58)$$

iar funcția  $\Phi(\eta)$  dată de relația (3.57) devine:

$$\Phi(\eta) = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} e^{-\frac{1}{2}i\theta} \quad (3.59)$$

Relația (3.59) poate fi aplicată numai pentru  $r \ll a$ , având în vedere aproximația făcută în vederea obținerii relației (3.57).

Pornind de la expresia lui  $\Phi(\eta)$  dată de relația (3.59) se pot calcula  $\text{Re}\Phi(\eta)$ ,  $\text{Re}\Phi'(\eta)$  și  $\text{Im}\Phi'(\eta)$ .

Dacă avem în vedere relațiile lui Euler:

$$e^{-\frac{1}{2}i\theta} = \cos\frac{\theta}{2} - i \sin\frac{\theta}{2} \quad (3.60)$$

funcția  $\Phi(\eta)$ , în care  $\eta$  este reprezentat prin  $r$  și  $\theta$ , devine:

$$\Phi(\eta) = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos\frac{\theta}{2} - i \sin\frac{\theta}{2} \right)$$

de unde se obține:

$$\begin{aligned} \text{Re}\Phi(\eta) &= \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \\ \text{Im}\Phi(\eta) &= -\frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Pornind de la expresia lui  $\Phi(\eta)$  dată de relația (3.57) scrisă sub forma:

$$\Phi(\eta) = \frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \eta^{-\frac{1}{2}}$$

se obține prin derivare în raport cu  $\eta$  următoarea relație:

$$\Phi'(\eta) = -\frac{1}{2} \frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2}} r^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}i\theta} \quad (3.62)$$

respectiv:

$$\Phi'(\eta) = -\frac{1}{2} \frac{1}{r} \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} e^{-\frac{3}{2}i\theta} \quad (3.63)$$

Având în vedere formulele lui Euler, relația de mai sus devine:

$$\Phi'(\eta) = -\frac{1}{2r} \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos\frac{3\theta}{2} - i \sin\frac{3\theta}{2} \right) \quad (3.64)$$

de unde:

$$\text{Re}\Phi'(\eta) = -\frac{1}{2r} \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos\frac{3\theta}{2} \right)$$

respectiv:

$$y \text{Re}\Phi'(\eta) = -\frac{y}{2r} \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos\frac{3\theta}{2} \right)$$

Dacă se are în vedere relația:

$$\frac{y}{r} = \sin\theta = 2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}$$

înlocuită în relația de mai sus conduce la:

$$y \text{Re}\Phi'(\eta) = -\frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \quad (3.65)$$

În mod analog, din relația (3.64) va rezulta:

$$\text{Im}\Phi'(\eta) = \frac{1}{2r} \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{3\theta}{2}$$

de unde:

$$y \operatorname{Im} \Phi'(\eta) = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \quad (3.66)$$

Având în vedere relațiile (3.61), (3.65) și (3.66), sistemul (3.54) va avea următoarea formă:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (3.67)$$

cu  $\sigma_z=0$  pentru starea plană de tensiuni sau  $\sigma_z=v(\sigma_x+\sigma_y)$  pentru starea plană de deformații.

Tensiunile  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  și  $\sigma_z$  sunt proporționale cu tensiunea aplicată  $\sigma$ , variază cu rădăcina pătrată a mărimii fisurii și tind spre  $\infty$  când  $r$  tinde spre zero.

Din relațiile de mai sus se observă că tensiunile la vârful unei fisuri se calculează ca produsul dintre factorul geometric  $\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cdot f(\theta)$ , care depinde de poziția elementului

în care se calculează tensiunile și factorul  $\sigma \cdot \sqrt{\pi a}$ . Acest ultim factor ce reprezintă o măsură a creșterii tensiunii datorită prezenței unei fisuri în raport cu tensiunea existentă în placă în absența fisurii, a fost denumit *factor de intensitate a tensiunii* și s-a notat cu  $K$  ( $K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$ ). Indicele  $I$  este utilizat pentru a preciza că suntem în *modul I* de solicitare. Factorul de intensitate a tensiunii se măsoară în  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

În aceste condiții, ecuațiile (3.67) capătă forma generală:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (3.68)$$

Cunoscând tensiunile care acționează pe fețele elementului considerat se pot calcula și tensiunile principale  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  pentru starea plană de tensiune:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (3.69)$$

de unde rezultă:

$$\sigma_{1,2} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4K_I^2}{2\pi r} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

astfel încât se deduce:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ \sigma_2 &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

În cazul stării plane de deformare va apare și tensiunea  $\sigma_3$ :

$$\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{2\nu K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.71)$$

În mod analog se obțin expresiile pentru celelalte două moduri de solicitare.

*Modul II*

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{cases} \quad (3.72)$$

unde  $K_{II} = \tau \sqrt{\pi a}$ .

*Modul III*

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (3.73)$$

unde  $K_{III} = \tau \sqrt{\pi a}$

### 3.8.2. Calculul deplasărilor

Conform legii lui Hooke generalizată, expresia pentru deformația specifică pe direcția x este dată de relația:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

în care  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$  și ca urmare va rezulta:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x (1 - \nu^2) - \nu \sigma_x (1 + \nu)] \quad (3.74)$$

unde:

- E reprezintă modulul de elasticitate longitudinal;
- $\nu$  este coeficientul lui Poisson.

Dacă se au în vedere relațiile diferențiale dintre deplasări și deformațiile specifice:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

va rezulta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_x (1 - \nu^2) - \nu \sigma_x (1 + \nu)]$$

de unde:

$$u = \frac{1}{E} \int [\sigma_x (1 - \nu^2) - \nu \sigma_x (1 + \nu)] dx$$



Utilizând relațiile pentru  $\sigma_x$  și  $\sigma_y$  din sistemul (3.72), relația de mai sus devine:

$$u = \frac{1+\nu}{E} \int \{ (1-\nu) [\operatorname{Re} \Phi(z) - y \operatorname{Im} \Phi'(z)] - \nu [\operatorname{Re} \Phi(z) + y \operatorname{Im} \Phi'(z)] \} dz$$

de unde se deduce:

$$u = \frac{1+\nu}{E} \left[ (1-2\nu) \operatorname{Re} \bar{\Phi}(z) - y \operatorname{Im} \Phi(z) \right] \quad (3.75)$$

Termenul  $\operatorname{Im} \Phi(z)$  se regăsește în a doua relație a sistemului (3.61).

Pentru calculul lui  $\operatorname{Re} \bar{\Phi}(z)$  se pornește de la relația (3.57), de unde prin integrare se obține:

$$\bar{\Phi}(\eta) = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{2}} \eta^{\frac{1}{2}} = 2 \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi}} \eta^{\frac{1}{2}}$$

Utilizând substituția  $\eta = r e^{i\theta}$  se obține:

$$\bar{\Phi}(\eta) = \frac{2\sigma \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi}} r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} = 2K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Aplicând relațiile lui Euler vom avea:

$$\bar{\Phi}(\eta) = 2K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

de unde se deduce:

$$\operatorname{Re} \bar{\Phi}(\eta) = 2K_I \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.76)$$

Pe baza relațiilor (3.61) și (3.76) se obține pentru deplasarea  $u$  dată de relația (3.75), următoarea expresie în funcție de factorul de intensitate a tensiunii  $K_I$ :

$$u = \frac{2K_I(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (3.77)$$

în care s-au avut în vedere relațiile:  $\frac{y}{r} = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$  și  $\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}$ .

Procedând în mod analog se poate calcula și deplasarea  $v$ .

Relația pentru deformația specifică pe direcția axei  $y$  rezultată din ecuația generalizată a lui Hooke este:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

în care  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$  și ca urmare va rezulta:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_y(1-\nu^2) - \nu\sigma_x(1+\nu)] \quad (3.78)$$

Dacă se au în vedere relațiile diferențiale dintre deplasări și deformațiile specifice:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

va rezulta:

$$v = \frac{1}{E} \int [\sigma_y(1-\nu^2) - \nu\sigma_x(1+\nu)] dy$$

Utilizând relațiile pentru  $\sigma_x$  și  $\sigma_y$  din sistemul (3.72), relația de mai sus devine:

$$v = \frac{1+\nu}{E} \int \{ (1-\nu) [\operatorname{Re} \Phi(z) + y \operatorname{Im} \Phi'(z)] - \nu [\operatorname{Re} \Phi(z) - y \operatorname{Im} \Phi'(z)] \} dy$$

de unde se obține:

$$v = \frac{1+\nu}{E} \int [(1-2\nu)\operatorname{Re} \phi(z) + y \operatorname{Im} \Phi'(z)] dy \quad (3.79)$$

Vom analiza pe fiecare din cei doi termeni ai relației (3.79) având în vedere relațiile Cauchy-Rieman:

$$\begin{aligned} (1-2\nu) \int \operatorname{Re} \Phi(z) dy &= (1-2\nu) \int \operatorname{Im} \Phi(z) dy = (1-2\nu) \operatorname{Im} \bar{\Phi}(z) \\ \int y \operatorname{Im} \Phi'(z) dy &= y \int \operatorname{Im} \Phi'(z) dy - \int \int \operatorname{Im} \phi'(z) dy dy = \\ &= -y \int \operatorname{Re} \Phi'(z) dy + \int \operatorname{Re} \Phi(z) dy = -y \operatorname{Re} \Phi(z) + \int \operatorname{Im} \Phi(z) dy = \\ &= -y \operatorname{Re} \Phi(z) + \operatorname{Im} \bar{\Phi}(z) \end{aligned} \quad (3.80)$$

Înlocuind cei doi termeni în relația (3.79) se obține:

$$v = \frac{1+\nu}{E} [2(1-\nu) \operatorname{Im} \bar{\Phi}(z) - y \operatorname{Re} \Phi(z)] \quad (3.81)$$

Dacă în această relație înlocuim pe  $\operatorname{Im} \bar{\Phi}(z)$  și  $\operatorname{Re} \Phi(z)$  cu expresiile date de relațiile (3.61) și (3.76), după efectuarea calculelor vom avea:

$$v = \frac{2K_I(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (3.82)$$

În același mod se pot calcula deplasările pentru starea plană de tensiune caracterizată prin deformațiile specifice:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] \end{aligned} \quad (3.83)$$

Având în vedere relațiile (3.54) vom avea:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \int \{(1-\nu)[\operatorname{Re} \Phi(z) - y(1+\nu) \operatorname{Im} \Phi'(z)]\} dx \\ v &= \frac{1}{E} \int \{(1-\nu)[\operatorname{Re} \Phi(z) + y(1+\nu) \operatorname{Im} \Phi'(z)]\} dy \end{aligned}$$

De unde se obține:

$$u = \frac{1-\nu}{E} \operatorname{Re} \bar{\Phi}(z) - \frac{1+\nu}{E} y \operatorname{Im} \bar{\Phi}(z) \quad (3.84)$$

Dacă avem în vedere relațiile (3.80) se deduce pentru deplasarea  $v$ :

$$\begin{aligned} v &= \frac{1-\nu}{E} \operatorname{Im} \bar{\Phi}(z) - \frac{1+\nu}{E} [-y \operatorname{Re} \Phi(z) + \operatorname{Im} \bar{\Phi}(z)] \text{ respectiv} \\ v &= \frac{2}{E} \operatorname{Im} \bar{\Phi}(z) - \frac{1+\nu}{E} y \operatorname{Re} \Phi(z) \end{aligned} \quad (3.85)$$

Dacă în relațiile (3.84) și (3.85) se înlocuiesc  $\operatorname{Re} \Phi(z)$ ,  $\operatorname{Re} \bar{\Phi}(z)$  și  $\operatorname{Im} \bar{\Phi}(z)$  cu expresiile lor date de (3.61) și (3.76), după efectuarea calculelor se obține:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \nu \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ v &= \frac{2K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \nu \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.86)$$

Deplasările  $v$  sunt foarte importante deoarece pe baza lor se pot calcula deplasările la deschiderea flancurilor fisurii. Astfel, pentru starea plană de deformare deplasarea  $v$  la distanța  $x$  față de centrul fisurii se obține din relația (3.81) punând condiția  $y=0$ . Va rezulta:

$$v = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \operatorname{Im} \bar{\Phi}(z) = \frac{2\sigma}{E} (1-\nu^2) \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3.87)$$

În mod analog, pentru starea plană de tensiune, din relația (3.85) vom avea:

$$v = \frac{2}{E} \operatorname{Im} \bar{\Phi}(z) = \frac{2\sigma}{E} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3.88)$$

Procedând în același mod, se pot stabili deplasările și pentru celelalte cazuri de solicitare. În condițiile stării plane de deformare se obține:

### Modul II

$$\begin{aligned} u &= \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ v &= \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( -1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ w &= 0 \end{aligned} \quad (3.89)$$

### Modul III

$$w = \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.90)$$

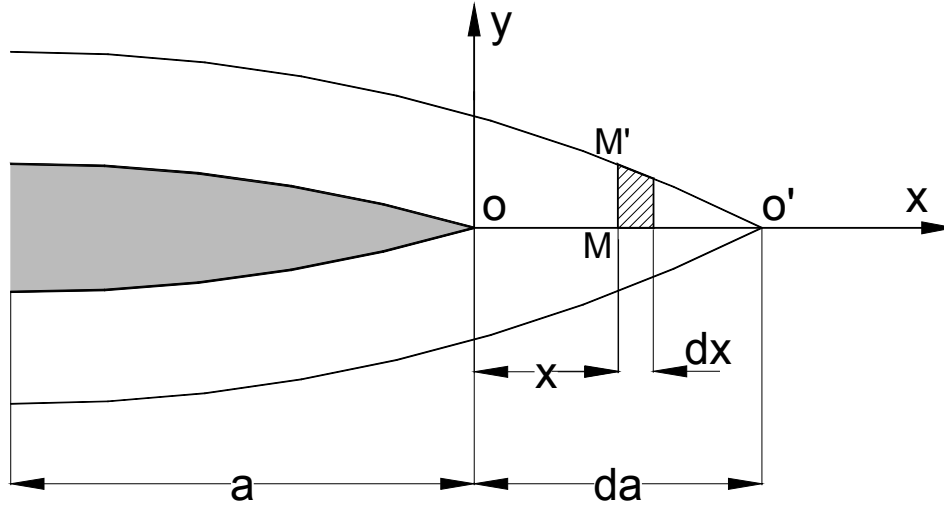
Cunoașterea factorului de intensitate a tensiunii  $K_I$  ( $K_{II}$ ,  $K_{III}$ ) permite determinarea tensiunilor și deplasărilor în vecinătatea unei fisuri ascuțite în *coordonate carteziane sau polare*. Factorul  $K_I$  de intensitate a tensiunilor nu trebuie confundat cu coeficientul  $k_t$  de concentrare a tensiunilor:  $k_t$  reprezintă raportul dintre tensiunea maximă de la vârful fisurii și tensiunea nominală. Relațiile (3.72) reprezintă o soluție în domeniul elastic care conduce la valori infinite pentru tensiunile  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  și  $\tau_{xy}$  la vârful fisurii ( $r \rightarrow 0$ ). În realitate acest lucru nu se întâmplă pentru că apare o deformare plastică ce permite relaxarea acestor tensiuni. Ca urmare, mărimea factorului de intensitate a tensiunii depinde de mărimea zonei plastice ce se stabilește la vârful fisurii.

### 3.9. Relația dintre energia disponibilă pentru propagarea fisurii și factorul de intensitate a tensiunii

Așa cum s-a arătat, energia disponibilă pentru propagarea fisurii,  $G$ , este independentă de configurația încărcării. Ca urmare, pentru stabilirea unei relații între  $G$  și  $K$  se consideră numai cazul deformațiilor impuse ( $G$  fiind independent de evoluția ulterioară a sistemului). În acest caz diminuarea energiei elastice a sistemului  $dW_e$  este utilizată pentru furnizarea energiei ( $G \cdot da$ ) necesară propagării fisurii cu  $da$ :

$$G \cdot da = -dW_e; \quad dW_e < 0$$

Această diminuare a energiei elastice, atunci când fisura se propagă, este egală cu lucrul mecanic  $dL$  (cu semn schimbat) care trebuie furnizat pentru reînchiderea fisurii pe lungimea  $da$ . Aici se are în vedere faptul că, procesul de reînchidere a fisurii este reversibil, aceeași cantitate de energie fiind utilizată atât pentru propagarea cât și pentru reînchiderea fisurii, *figura 3.16*.



**Fig. 3.16.** Propagarea și închiderea fisurii

Lucrul mecanic  $dL$  poate fi calculat plecând de la tensiunile și deformațiile existente în vecinătatea extremității fisurii.

Considerăm un element  $dx$  la distanța  $x$  de vârful fisurii pe abscisă  $0 < x < da$ . Forța ce trebuie aplicată pentru ca punctul  $M'$  să ajungă din nou în  $M$  este  $(\sigma \cdot dx)$ , în care  $\sigma$  este tensiunea din punctul  $M$  datorată fisurării extremității. Având în vedere faptul că originea trece în  $O'$ , coordonatele punctului  $M$  (care coincide cu  $M'$  atunci când fisura se închide) sunt:

$$\begin{cases} r = da - x \\ \theta = \pi \end{cases}$$

Lucrul mecanic necesar pentru deplasarea elementului  $dx$  din  $M'$  în  $M$  este egal cu  $\frac{1}{2} \sigma u dx$ . Pentru reformarea fisurii pe lungimea  $da$ , vom avea:

$$dL = 2 \int_0^{da} \frac{1}{2} (\sigma_{yy} u_y + \tau_{yx} u_x + \tau_{yz} u_z) dx \quad (3.91)$$

Factorul 2 provine din faptul că fisura se extinde în ambele direcții. Tensiunile  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{yx}$  și  $\tau_{yz}$  produc deschiderea fisurii în modul I, respectiv II și III, *figura 3.17*.  $u_x$ ,  $u_y$  și  $u_z$  reprezintă deplasările înainte de deschiderea fisurii ( $r = da - x$  și  $\theta = \pi$ ).

Atunci când avem doar *modul I* de solicitare lucrul mecanic va fi dat doar de tensiunea  $\sigma_{yy}$ :

$$dL = 2 \int_0^{da} \frac{1}{2} \sigma_{yy} u_y dx$$

în care:

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}}; \quad u_y = \frac{K_I}{2E} \sqrt{\frac{da-x}{2\pi}} (1+\nu)(2k+2)$$

de unde rezultă:

$$dL = \frac{K_I^2}{2\pi E} (1+\nu)(k+1) \int_0^{da} \sqrt{\frac{da-x}{x}} dx$$

în care:

$$\int_0^{da} \sqrt{\frac{da-x}{x}} dx = \frac{\pi}{2} da$$

Va rezulta:

$$dL = \frac{K_I^2}{4E} (1+\nu)(k+1) da$$

și ca urmare:

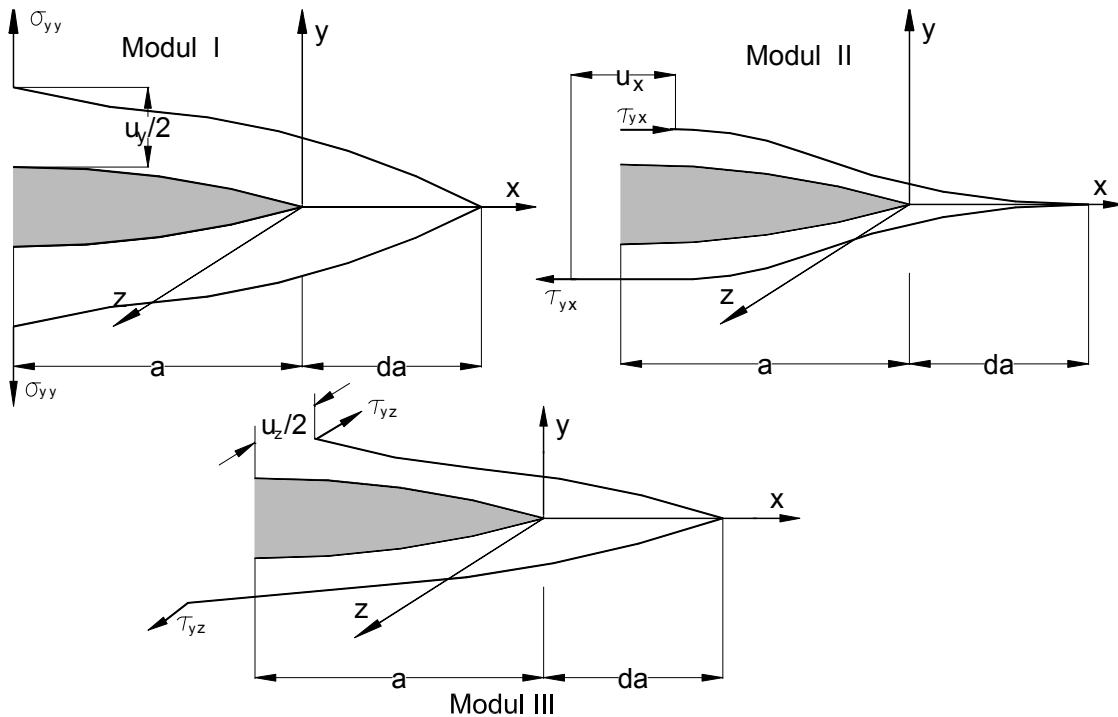
$$G_I = \frac{K_I^2}{4E} (1+\nu)(k+1) \quad (3.92)$$

În cazul *stării plane de deformare* pentru care  $k=3-4\nu$  se obține:

$$G_I = \frac{K_I^2}{4E} (1-\nu^2) \quad (3.93)$$

În cazul *stării plane de tensiuni*,  $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  și atunci:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad (3.94)$$



**Fig. 3.17.** Tensiunile și deplasările flancurilor fisurii

În *modul II de sollicitare* calculul lui  $dL$  este dificil deoarece fisura nu se propagă în planul inițial. În consecință, relațiile:

$$G_{II} da = \int_0^{da} \tau_{yx} u_x dx$$

din care rezultă:

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E} - \text{ stare plană de tensiuni;}$$

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2}{4E} (1-\nu^2) - \text{ stare plană de deformății}$$

nu sunt riguros corecte.

Pentru *modul III de solicitare* vom avea:

$$G_{III} da = \int_0^{da} \tau_{zy} u_z dx$$

de unde rezultă:

$$G_{III} = \frac{K_{III}^2}{E} (1 + \nu)$$

Este indicat să se sumeze energiile potențiale libere corespunzătoare diferitelor moduri de solicitare:

$$G = \frac{K_I^2}{E} + \frac{K_{II}^2}{E} + \frac{K_{III}^2}{E} (1 + \nu) \quad \text{-pentru starea plană de tensiuni;}$$

$$G = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2) + \frac{K_{II}^2}{E} (1 - \nu^2) + \frac{K_{III}^2}{E} (1 + \nu) \quad \text{-pentru starea plană de deformații.}$$

### 3.10. Factorul de intensitate a tensiunii în raport cu complianța epruvetei

Pornind de la expresia energiei disponibile pentru propagarea fisurii, relația (3.27), și având în vedere relațiile (3.93) și (3.94) se obține:

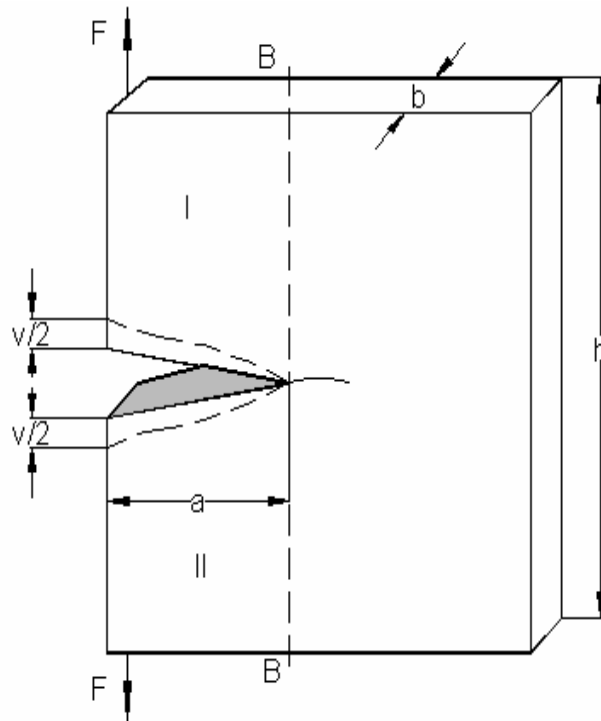
$$K_I^2 = E^* G = \frac{E^* F^2}{2b} \frac{\partial C}{\partial a} \quad (3.95)$$

în care:

$$E^* = E \quad \text{- pentru starea plană de tensiuni;}$$

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{- pentru starea plană de deformații.}$$

Să considerăm o epruvetă supusă la tracțiune prevăzută cu o creștătură laterală de lungime  $a$ , *figura 3.18*.



**Fig. 3.18.** Epruvetă cu creștătură laterală

De o parte și de alta a creștăturii are loc deplasarea punctelor de aplicație a forțelor și a celor două părți ale epruvetelor cu cantitatea  $v/2$ . Părțile I și II ale epruvetelor pot fi considerate ca niște grinzi de lungime  $a$ , încastrate în B-B'. Ca urmare, deplasarea  $v$  pentru întreaga epruvetă devine:

$$v = \frac{2Fa^3}{3EI_z} = \frac{2Fa^3}{3E \frac{b(h/2)^3}{12}} = \frac{64Fa^3}{Eb h^3}$$

Pe baza definiției complianței rezultă:

$$C = \frac{v}{F} = \frac{64a^3}{Eb h^3}$$

iar derivata parțială a complianței în raport cu lungimea creștăturii va fi:

$$\frac{\partial C}{\partial a} = \frac{192a^2}{Eb h^3}$$

Înlocuind  $\frac{\partial C}{\partial a}$  în relația (3.95) se obține:

$$K_I^2 = \frac{E^* F^2}{2b} \frac{192a^3}{Eb h^3} = \frac{E^*}{E} \frac{96F^2 a^2}{b^2 h^3}$$

Ca urmare, factorul de intensitate a tensiunii depinde de valoarea solicitării, de profunzimea creștăturii dar și de dimensiunile epruvetei utilizate.

### 3.11. Tenacitatea la fisurare – noțiuni

#### 3.11.1. Tenacitatea $K_{Ic}$

Se consideră o epruvetă confecționată dintr-un material cu comportare perfect elastică în cadrul solicitării, *figura 3.18*. Epruveta este prevăzută cu o creștătură și facem în așa fel încât să crească factorul de intensitate a tensiunii  $K$ . Se constată că fisura începe să se propage atunci când factorul de intensitate a tensiunii atinge o valoare critică  $K_c$ . Dacă solicitarea este în *modul I* această valoare critică se notează cu  $K_{Ic}$ . Pe baza acestui criteriu, care ia în considerație valoarea critică a factorului de intensitate a tensiunii, ruperea are loc pentru o distribuție critică a tensiunilor la vârful fisurii, indiferent de geometria creștăturii epruvetei.

$K_{Ic}$  se numește *tenacitate la fisurare* sau rezistență la fisurare și este o proprietate caracteristică materialului, independentă de configurația sistemului.

Din relațiile (3.68), pentru  $\theta=0$  se poate deduce următoarea relație pentru tenacitatea la fisurare:

$$K_{Ic} = \sigma_f \sqrt{\alpha \pi a} \quad (3.96)$$

în care:

- $\alpha$  este un factor geometric care depinde de lungimea creștăturii  $a$  și de dimensiunile probei utilizate în cadrul determinării;
- $\sigma_f$  reprezintă tensiunea la care fisura devine instabilă – apare ruperea.

Această relație este similară cu cea a lui Griffith și confirmă faptul că tensiunea de rupere este invers proporțională cu rădăcina pătrată a mărării fisurii  $a$ .

#### 3.11.2. Tenacitatea $G_{Ic}$

Se poate spune că o fisură se va propaga instabil și dacă  $G$  atinge o valoare critică  $G_c$  reprezentând energia critică unitară necesară propagării fisurii. Această

energie este necesară pentru a face ca fisura să se propage pe o grosime unitară, independentă fiind de geometria fisurii sau a epruvetei. În cazul materialelor foarte fragile,  $G_c$  este egală cu de două ori energia superficială: –  $G_c=2\gamma_s$ . Pentru materialele ductile  $G_c$  include termenul energiei datorat deformației plastice localizată la vârful fisurii, sistemul rămânând cu comportare elastică în ansamblul său. Termenul  $G_c$  poate cuprinde și alți termeni ai energiei disipate prin propagarea fisurii. Pentru cazul de solicitare în *modul I*,  $G_c$  devine  $G_{Ic}$ .

### 3.12. Relația între parametrii tenacității

Pentru a descrie rezistența la propagarea unei fisuri s-au utilizat trei parametri:  $\gamma_s$ ,  $K_{Ic}$  și  $G_c$ . Relațiile (3.92) sau (3.93) stabilite între  $G$  și  $K$  sunt valabile și pentru momentul critic de pierdere a stabilității propagării fisurii, adică între  $G_c$  și  $K_{Ic}$ . Pentru un solid cu dimensiunile considerate infinite în raport cu dimensiunile fisurii s-au găsit relațiile:

- pentru *starea plană de tensiuni*:
  - $\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}}$  - teoria lui Griffith
  - $\sigma_f = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}}$  - criteriul tensiunilor

de unde rezultă:

$$K_{Ic} = \sqrt{2E\gamma_s} = \sqrt{EG_{Ic}}$$

și ca urmare:

$$G_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2}{E} \quad (3.97)$$

Pentru *starea plană de deformație*, în mod asemănător se găsește:

$$G_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2}{E} (1 - \nu^2) \quad (3.98)$$

Vom putea utiliza astfel, oricare din cei trei parametri, respectiv  $\gamma_s$ ,  $K_{Ic}$  sau  $G_{Ic}$  pentru a putea caracteriza rezistența la fisurare a unui material, deoarece ei sunt echivalenți. Relațiile precedente au fost stabilite pentru materiale foarte fragile sau care prezintă o plasticitate limitată la vârful fisurii. Pentru materialele ductile trebuie să se țină cont de parametrii *Mecanicii neliniare a ruperii*. În acest caz, pentru a caracteriza aceste materiale, se pot utiliza doi parametri independenți, pe de o parte deschiderea critică la vârful fisurii  $\delta_c$  și pe de altă parte valoarea critică a integralei  $J$ , respectiv  $J_{Ic}$ . Acești doi parametri se vor prezenta în capitolele următoare.

### 3.13. Disiparea energiei la vârful fisurii

Energia  $\gamma_s$  asociată unei suprafețe provine din faptul că, un anumit număr de legături se rup creându-se noi suprafețe. Pentru ruperea respectivelor legături energia furnizată poate fi de tip mecanic, chimic, etc. Ca urmare, energia  $\gamma_s$  poate fi estimată plecând de la datele termodinamice ale energiei de sublimare sau de la relația:

$$\gamma_s = \frac{Ed_0}{\pi^2}$$

În cazul monocristalelor această energie depinde de orientarea planelor cristalografice. În *tabelul 3.1* sunt prezentate valori ale lui  $\gamma_s$  pentru diverse categorii de materiale și de asemenea valorile energiei critice disponibile pentru propagarea fisurii.



**Tab. 3.1**

Materiale (monocristale)	$2\gamma_s$ [J/m <sup>2</sup> ]	$G_{Ic}$ [J/m <sup>2</sup> ]
Covalente		
C	30	
Si	6	3
Ge	5	3
Covalente ionice		
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	13	7
SiO <sub>2</sub> ( cuarț )	2,6	20
SiO <sub>2</sub> (silica)	2,4	9
Ionice		
MgO	10	3
LiF	3,6	0,8
NaCl	2,4	0,6
Metalice		
W	22	3
Fier α	10	$2 \cdot 10^3$
Zn	6	0,2
Be	14	$10^3$

Se poate constata faptul că, pentru anumite solide  $G_{Ic}$  este de ordinul a  $2\gamma_s$ , aceste materiale având un comportament fragil. Materialele pentru care  $G_{Ic} \gg 2\gamma_s$  au un comportament ductil. Pentru aceste materiale trebuie să se țină cont de deformația plastică de la vârful fisurii. În acest caz vom avea:

$$G_{Ic} = 2\gamma_s + \gamma_p$$

unde  $\gamma_p$  reprezintă energia de deformație plastică pe unitatea de suprafață propagată din fisura existentă. În aceste condiții, criteriul lui Griffith se poate scrie sub o formă similară ținând cont de energia de deformare plastică, aceasta fiind extensia Irwin-Orowan a criteriului lui Griffith [208]:

- $\sigma_f = \sqrt{\frac{E(2\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a}}$  - stare plană de tensiuni;
- $\sigma_f = \sqrt{\frac{E(2\gamma_s + \gamma_p)}{(1-\nu^2)\pi a}}$  - stare plană de deformații.

Energia de deformație plastică este egală cu:

$$\gamma_p = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

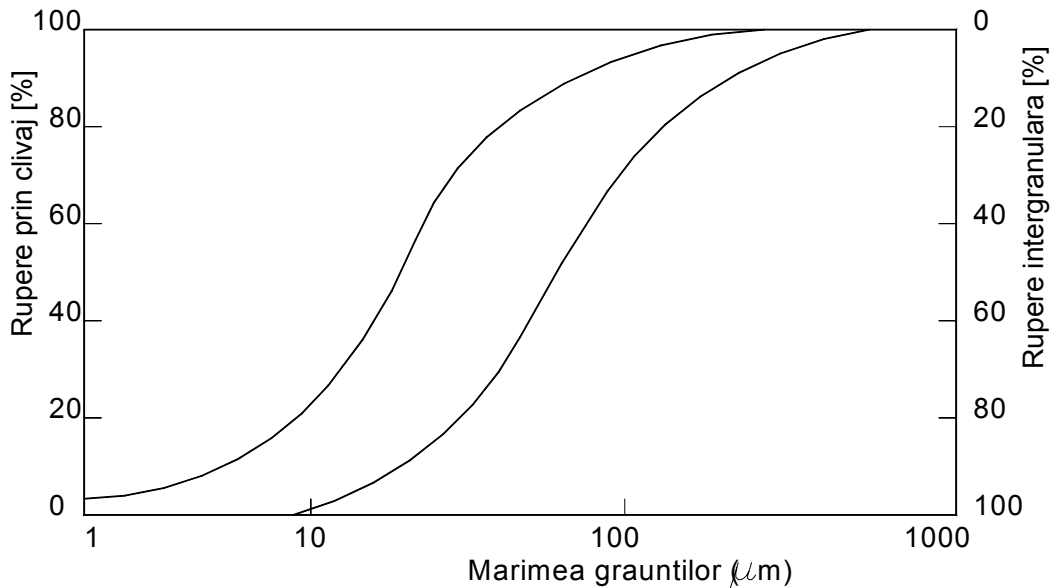
în care  $V$  este volumul supus deformării plastice la vârful fisurii. În cazul unui solid rigid-plastic supus la o tensiune uniaxială,  $\gamma_p$  este dat prin:

$$\gamma_p = \sigma_y \int_V \varepsilon_y dV$$

Ductilitatea solidelor are un efect foarte important asupra comportamentului la fisurare. În cazul metalelor  $\gamma_p$  este în general foarte mare, raportul  $\gamma_p/\gamma_s$  poate fi în jur de 1000. Astfel, criteriul lui Griffith stabilit pentru materialele fragile se poate aplica în cazul materialelor ce prezintă o ductilitate limitată în zona de la vârful fisurii dacă se ține cont

de energia de deformare plastică ( $2\gamma = 2\gamma_s + \gamma_p$ ). În cazul policristalelor valorile lui  $\gamma$  obținute experimental sunt mai mari decât în cazul monocristalelor, de la 10 la 50 J/m<sup>2</sup> pentru policristale față de 0,5 până la 3 J/m<sup>2</sup> pentru monocristale. Această diferență are mai multe cauze. În primul rând, suprafața de rupere este mai rugoasă în cazul policristalelor, fisura schimbându-și orientarea de la un grăunte la altul. În al doilea rând, în policristale sunt deformări plastice mai importante. Alte cauze ce pot interveni sunt: formarea fisurilor secundare plecând de la o fisură principală sau interacțiunea frontului fisurii cu diverse particule (ductile sau fragile) precipitate sau fibre (cazul compozitelor).

Toate aceste efecte conduc la o creștere a energiei superficiale în raport cu mărimea grăunților. Experimental se observă, fie o creștere a energiei superficiale fie o diminuare a acesteia, atunci când mărimea grăunțului crește. De aici provine și variația modului de rupere în raport cu mărimea grăunțului. De exemplu, în cazul policristalelor de MgO, fisura este esențialmente intergranulară pentru mărimi mici ale grăunților și devine intragranulară (clivaj) pentru mărimi mai mari ale grăunților, *figura 3.19*.



**Fig. 3.19.** Evoluția modului de rupere cu mărimea grăunților în MgO

În general, în cazul în care plasticitatea rămâne limitată la vârful fisurii și ca urmare materialul în restul său rămâne în regim elastic, se poate utiliza criteriul lui Griffith cu energia superficială de forma:

$$\gamma_s = \Psi\gamma_0 + \gamma_p + \gamma_a$$

în care:

- $\gamma_0$  este energia de suprafață termodinamică (la inițierea fisurii  $\rightarrow \gamma_s$ ) iar  $\Psi$  este un factor ce depinde de orientarea planului fisurii;
- $\gamma_p$  reprezintă energia pe unitatea de suprafață, disipată prin deformare plastică, atunci când are loc propagarea fisurii;
- $\gamma_a$  este un termen care ține cont de alte forme de disipare a energiei (termică, acustică, cinetică) pe unitatea de suprafață, în timpul propagării.

Pentru ca fisura să nu se propage trebuie ca energia elastică să fie inferioară energiei de propagare:

$$W_{\text{elast}} < W_{\text{prop}}$$

sau:

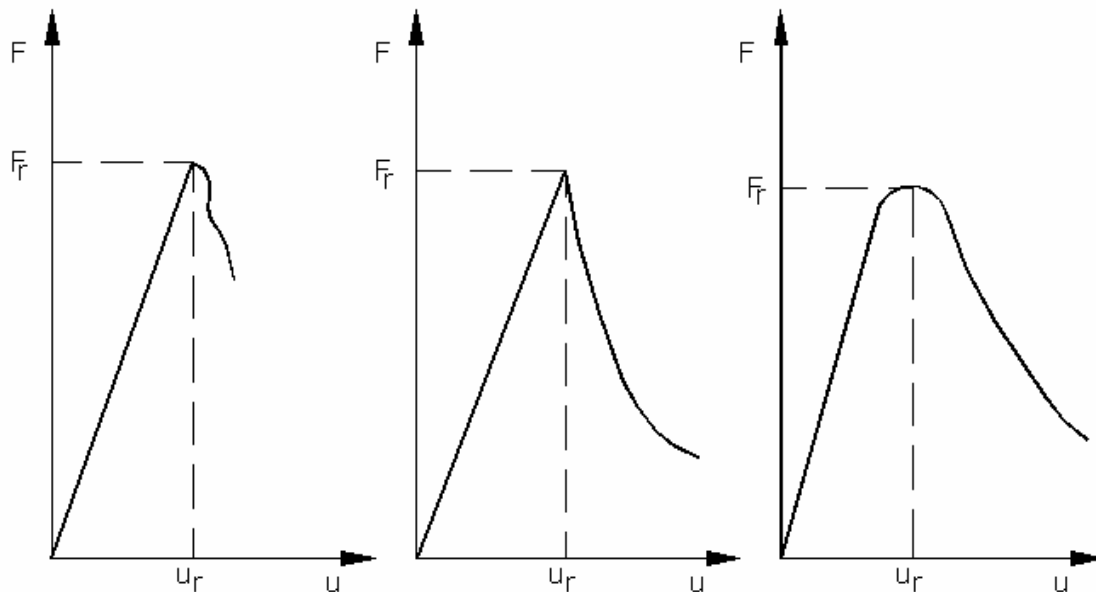
$$k_1 \frac{\sigma_f^2}{2E} V < k_2 \gamma_s S$$

în care: -  $k_1, k_2$  sunt constante;  
-  $\sigma_f$  reprezintă tensiunea de rupere.

Este evident (și aparent paradoxal) că această inegalitate este cu atât mai mult respectată cu cât  $\sigma_f$  este mai mică și  $E$  mai mare, dar inversa este adevărată numai în ceea ce privește inițierea fisurii.

### 3.14. Lucrul mecanic la rupere

În cele mai multe cazuri, materialele fragile se rup catastrofal. În *figura 3.20* sunt prezentate trei tipuri posibile de comportamente la rupere.



a) – rupere bruscă; b) – rupere semicontrolată; c) – rupere controlată

**Fig. 3.20.** Diferite tipuri de comportament la rupere

Fie  $W$  aria determinată de curba încărcare-deplasare în cazul unei ruperi controlate. Energia superficială la rupere sau „lucrul mecanic necesar pentru rupere” este definită prin relația:

$$\gamma_r = \frac{W}{2b(w-a)} \quad (3.99)$$

în care:

- $w$  este lățimea probei;
- $b$  este grosimea probei;
- $a$  este lungimea fisurii.

Această energie cuprinde energia de inițiere și energia de propagare a fisurii.

Pentru obținerea unei ruperi controlate este important de a minimiza energia elastică înmagazinată în momentul ruperii. În acest context, pentru solicitare se va utiliza o mașină de încercat la deformare constantă. Lucrul mecanic necesar pentru rupere  $\gamma_r$  este, în general, diferit de energia  $\gamma_s$  obținută din relația lui Griffith. În plus, acest lucru mecanic necesar ruperii depinde de geometria încărcării și nu poate fi considerat ca o proprietate intrinsecă a materialului.

Se poate utiliza, cu o anumită aproximație, energia elastică înmagazinată la încărcare maximă,  $W_r = \frac{F_r u_r}{2}$  ce corespunde mai degrabă procesului de inițiere decât energiei totale consumate în procesul de rupere. Prin definiție, energia potențială liberă pe unitatea de suprafață a fisurii propagate din fisura existentă,  $G$ , este dată de relația:

$$G = \frac{1}{2} \frac{F^2}{b} \frac{\partial C}{\partial a} = \frac{K^2}{E^*} \quad (3.100)$$

pentru o placă de grosime  $b$  în care:

$$E^* = E \quad \text{pentru starea plană de tensiuni;}$$

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \text{pentru starea plană de deformații.}$$

Plecând de la relația (3.100) se obține:

$$\frac{\partial C}{\partial a} = \frac{K^2}{E^*} \frac{2b}{F^2} \quad (3.101)$$

În această relație avem  $K = Y\sigma\sqrt{a}$  unde  $Y$  este un factor geometric ce depinde de mărimea probei și cea a fisurii.

Așadar vom avea:

$$\frac{\partial C}{\partial a} = \frac{2Y^2\sigma^2 ab}{F^2 E^*} \quad (3.102)$$

Pentru încovoierea în trei puncte avem:

$$\sigma = \frac{6FL}{4bw^2}$$

iar pentru încovoierea în patru puncte:

$$\sigma = \frac{3FL}{4bw^2}$$

în care  $L$  reprezintă distanța dintre reazeme.

În aceste condiții se obține:

$$\frac{\partial C}{\partial a} = \frac{9}{2} \frac{Y^2}{E^*} = \frac{L^2 a}{bw^4} \quad \text{- pentru încovoierea în trei puncte}$$

$$\frac{\partial C}{\partial a} = \frac{9}{8} \frac{Y^2}{E^*} = \frac{L^2 a}{bw^4} \quad \text{- pentru încovoierea în patru puncte}$$

Integrarea ecuației (3.102) conduce la:

$$C = \alpha \frac{L^2}{bw^4 E^*} \int Y^2 da + C_0 \quad (3.103)$$

cu:  $\alpha \begin{cases} = \frac{9}{2} \text{ trei puncte} \\ = \frac{9}{8} \text{ patru puncte} \end{cases}$

$$C_0 = \frac{Y_0}{F} \quad \text{- complianța probei nefisurate} \quad C_0 \begin{cases} = \frac{L^3}{4E^*bw^3} \text{ trei puncte} \\ = \frac{L^3}{8E^*bw^3} \text{ patru puncte} \end{cases}$$

Fie  $\gamma_r'$  energia pe unitatea de suprafață corespunzând încărcării maxime  $F_r$ :

$$\gamma_r' = \frac{W_r}{2b(w-a)} \quad (3.104)$$

$$\text{cu } W_r = \frac{F_r u_r}{2} = \frac{F_r^2 C}{2}.$$

Astfel, din relația (3.103) va rezulta:

$$\begin{aligned} W_r &= \frac{b^2}{E^*} \left[ \int Y^2 da + \frac{Lw}{18} \right] \text{ trei puncte} \\ W_r &= \frac{b^2}{E^*} \left[ \int Y^2 da + \frac{Lw}{9} \right] \text{ patru puncte} \end{aligned} \quad (3.105)$$

### 3.15. Considerații privind calculul de rezistență pe baza conceptelor mecanicii ruperii pentru modul I de solicitare

Soluția obținută pentru factorul de intensitate a tensiunii  $K_I$  este valabilă pentru o placă infinită cu o fisură centrală de lungime  $2a$ , solicitată uniform, conform modului I, după două direcții. Geometria fisurii, precum și forma și dimensiunile piesei influențează esențial câmpul de tensiuni și deformații în zona adiacentă acestei fisuri. În aceste condiții expresia factorului de intensitate a tensiunii capătă forma generală:

$$K_I = \alpha \sigma \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{w}\right) \quad (3.106)$$

unde  $\alpha$ ,  $f(a/w)$  reprezintă un coeficient, respectiv o funcție care corectează expresia lui  $K_I$ .

Atât  $\alpha$  cât și  $f(a/w)$  se determină pe baza analizei stării de tensiuni la vârful fisurii și pentru o serie de cazuri care sunt date în literatură.

Condiția de rezistență la ruperea fragilă a unei piese prevăzută cu fisură este asigurată dacă este satisfăcută inegalitatea:

$$K_I = \alpha \tau \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{w}\right) < K_{Ic} \quad (3.107)$$

Aplicarea relației (3.107) implică următoarele:

- Selecția materialelor din care sunt executate piesele sau elementele de rezistență trebuie să aibă la bază un  $K_{Ic}$  cât mai ridicat, în condițiile unei temperaturi date;
- Nivelul de solicitare a piesei trebuie să fie diminuat prin reducerea tensiunii nominale pentru evitarea, pe cât posibil, ca efectul local al concentrărilor de tensiune să se manifeste în zona fisurată;
- Controlul prin analize nedistructive a evoluției fisurii după anumite perioade de timp.

La cele de mai sus se mai adaugă următoarele: materialul trebuie să fie omogen și izotrop avînd o comportare inițial elastică urmată de una ideal plastică. Concentrarea tensiunii la vârful fisurii conduce la o plastifiere locală, prin formarea unei enclave plastice. Este necesar ca această enclavă plastică să fie extrem de restrînsă față de lungimea fisurii, respectiv dimensiunile piesei, pentru a nu influența distribuția tensiunilor elastice. Mecanica ruperii materialelor în domeniul liniar elastic este aplicabilă numai dacă enclava plastică este foarte mică, ceea ce impune ca piesele să aibă dimensiuni mult superioare acestei zone, și care se exprimă prin raportul  $K_{Ic}/\sigma_c$ . În acest sens trebuie avute în vedere și prevederile ASTM E399/1997 care impun respectarea stării plane de deformăție la determinarea experimentală a factorului critic de intensitate a tensiunii  $K_{Ic}$ , exprimată prin condiția:

$$B, a \geq 2,5 \left( \frac{K_{Ic}}{\tau_c} \right)^2 \quad (3.108)$$

### 3.16. Criterii de rupere în condițiile unor moduri mixte de solicitare

S-a constatat faptul că se ajunge la rupere atunci când este îndeplinită condiția:

$$K_I = K_{Ic}$$

În cazul în care acționează simultan două sau chiar toate cele trei moduri de solicitare problema trebuie rezolvată pe baza impunerii unor criterii de rupere.

*Erdogan și Sih* [64] au propus în anul 1963 un asemenea criteriu care presupune că:

- fisura se propagă pe direcția în care tensiunea circumferențială  $\sigma_\theta$  este maximă;
- fisura devine instabilă atunci când:

$$K_{Ic} = \sqrt{2\pi r} (\sigma_\theta)_{\max} \quad (3.109)$$

Pentru *modurile I și II*, tensiunile din imediata vecinătate a vârfului fisurii date de Irwin și determinate în coordonate polare [119], *figura 3.15a*, au expresiile:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + 2K_{II} (3 \cos \theta - 1) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)] \end{aligned} \quad (3.110)$$

Pentru a calcula  $K_{Ic}$  cu ajutorul relației (3.109) trebuie ca din relația (3.110) să deducem valoarea maximă pentru  $\sigma_\theta$ . Una din direcțiile principale este cea pentru care tensiunea tangențială este zero,  $\tau_{r\theta}=0$ . Din această condiție se deduce direcția principală  $\theta_0$  care se înlocuiește în expresia tensiunii  $\sigma_\theta$ .

Ca urmare, direcția principală se deduce din relația:

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (3.111)$$

Se obține astfel următoarea relație între  $K_I$ ,  $K_{II}$  și  $K_{Ic}$ :

$$\cos \frac{\theta_0}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right] = K_{Ic}$$

ce reprezintă criteriu de instabilitate în modul mixt (I+II).

Se poate remarca faptul că pentru modul I pur ( $\theta_0=0$ ) va rezulta  $K_{Ic}=K_I$ . Pentru modul II pur ( $K_I=0$ ), din relația (3.111) se deduce:

$$\theta_0 = \arccos \frac{1}{3} = 70,5^\circ$$

$$K_{IIc} = 0,87 K_{Ic}$$

Ipotezele făcute pentru elaborarea acestui criteriu au avut în vedere faptul că fisura se va propaga în direcția în care cantitatea de energie eliberată pe unitatea de lungime este maximă. Au fost propuse și o serie de relații empirice pentru a descrie ruperea în modul mixt. În acest sens menționăm criteriul lui Palaniswamy-Knaus:

$$\frac{K_I}{K_{Ic}} + \frac{3}{2} \left( \frac{K_{II}}{K_{Ic}} \right)^2 = 1$$

Pe baza acestui criteriu, pentru modul II pur rezultă  $K_{IIc}=0,82 \cdot K_{Ic}$ , relație apropiată de cea anterioară dată pe baza criteriului Erdogan-Sih.