TEMA NR. 1

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Să se arate că
$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

2. Se consideră matricele $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.
a) Să se arate că $A(\alpha) \cdot A(\beta) = A(\alpha+\beta)$.
b) Folosind inducția matematică și rezultatul de la punctul precedent, să se arate că
$$\left(A(\alpha)\right)^n = A(n\alpha), \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Să se determine matricele X și Y care satisfac relațiile: $3X + 2Y = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$; $2X + Y = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Răspuns: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Să se determine matricea X din egalitatea
$$-5\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Răspuns: $X = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3/2 & 9 \\ 44 & -13/2 \end{pmatrix}$.

5. Fie polinomul $P(X) = X^3 - 7X^2 + 13X - 5$. Să se calculeze $P(A)$ pentru $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Răspuns: $P(A) = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

TEMA NR. 1

6. Fie matricea pătratică $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că A este inversabilă;

b) Să se determine inversa A^{-1} a matricei A.

Răspuns: a) $\det A = -4$;

b) $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1 & -1/4 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

7. Folosind transformările elementare aplicate liniilor unei matrice, să se calculeze inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Răspuns:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/31 & -2/31 & 5/31 \\ -22/31 & 13/31 & 14/31 \\ 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}$$

8. Să se determine rangul fiecăreia dintre matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & +1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Răspuns: $\operatorname{rang} A = 2$; $\operatorname{rang} B = 2$; $\operatorname{rang} C = 3$.

TEMA NR. 1

9. Să se calculeze A^n, unde $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ și $n\in\mathbb{N}^*$.

Răspuns: $A^n = 2^{n-1}A$

10. Determinați rangurile matricelor:

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&2&4\\3&1&6&2\\4&5&8&10\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix}2&10&-12&1\\2&\alpha&-2&2\\4&-1&2\alpha&5\end{pmatrix}$; d) $A=\begin{pmatrix}\alpha&\beta&2&1\\\alpha&2\beta-1&3&1\\\alpha&\beta&\beta+3&2\beta-1\end{pmatrix}$.

Discuție după $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Răspuns: a) rang $A=2$; b) rang $A=4$;

c) rang $A=\begin{cases}2, & \text{dacă } \alpha=3\\3, & \text{dacă } \alpha\neq3\end{cases}$;

d) rang $A=\begin{cases}2, & \text{pentru } \beta=1 \text{ sau } \beta=5 \text{ și } \alpha=0\\3, & \text{în rest.}\end{cases}$

11. Să se rezolve ecuația matriceală $X\cdot A=B$, unde $A=\begin{pmatrix}1&1&i\\i&-1&3i\\-2&2i&-1-i\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}10&20&30\end{pmatrix}$.

Răspuns: $X=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}-3+11i & 3+9i & -1+7i\end{pmatrix}$.

12. Rezolvați ecuația matriceală $AX=B$, unde $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

Răspuns: $X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

TEMA NR. 1

13. Să se calculeze inversele matricelor:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Răspuns: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 10 \\ -6 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}$.

14. Rezolvați ecuația matriceală $A \cdot X \cdot B = C$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ și } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Răspuns: $X = A^{-1} \cdot C \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

15. Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ x-2 & 1 & 2 \\ x-3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Răspuns: $x = 2$.

16. Folosind proprietățile determinanților, să se calculeze următorii determinanți

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & -5 & 4 & -4 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Răspuns: a) $(a-b)(b-c)(c-a)$; b) $2abc(a-b)(b-c)(c-a)$; c) 70; d) 37; e) -23.

TEMA NR. 1

17. Să se rezolve matriceal sistemul $\begin{cases} 3x - y + z = 4 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$

Răspuns: $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$.

18. Să se discute și, în caz de compatibilitate, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} m x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + m x_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + m x_3 = m^2 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Răspuns: a) dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ sistemul are soluția unică $x_1 = -\frac{m+1}{m+2}$; $x_2 = \frac{1}{m+2}$; $x_3 = \frac{(m+1)^2}{m+2}$.

b) dacă $m = -2$ sistemul este incompatibil

c) dacă $m = -1$ sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sunt date de:
$x_1 = 1 - \alpha - \beta$; $x_2 = \alpha$; $x_3 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

19. Să se rezolve următoarele sisteme liniare:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -30 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 8x_1 - x_2 + x_3 + 11x_4 = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 4 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = -20 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 8x_4 = -10 \end{cases}$

Răspuns: a) soluție unică: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = -2$

b) compatibil dublu nedeterminat $\begin{cases} x_1 = \frac{3-4\beta}{3}, \; x_2 = \frac{3\alpha+\beta}{3} \\ x_3 = \alpha, \; x_4 = \beta, \; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$

c) simplu nedeterminat $x_1 = \alpha + 6$, $x_2 = 2\alpha + 6$, $x_3 = -6\alpha - 10$, $x_4 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

d) sistemul este incompatibil.