TEMA NR. 3

SPAŢII EUCLIDIENE

1. Să se calculeze produsul scalar al vectorilor:

a) $\vec{v}_1 = (1, 3, -3, 4)$, $\vec{v}_2 = (4, -5, 3, 1)$ în $\mathbb{R}^4$;

b) $\vec{w}_1 = (3, 2, -4, 0, 1)$, $\vec{w}_2 = (-1, 1, -1, 4, -3)$ în $\mathbb{R}^5$;

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

considerând că spaţiile $\mathbb{R}^4$ şi $\mathbb{R}^5$ sunt înzestrate cu produsul scalar standard (canonic), iar produsul scalar în spaţiul vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ al matricelor pătratice de ordinul doi este dat

$$A \cdot B = tr(A^T B) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} a_{ki} b_{ki}, \text{ oricare}$$

ar fi matricele $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ cu elementele numere reale, prin "tr" înţelegând urma matricei dintre paranteze, adică suma elementelor de pe diagonala principală a matricei produs $A^T B$.

<u>Răspuns.</u> a) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -16$; b) $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 0$; c) $A \cdot B = 7$.

2. În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^2$ prevăzut cu produsul scalar standard (canonic sau uzual) se consideră vectorii

$$\vec{v}_1 = (1, 2\alpha) \text{ şi } \vec{v}_2 = (\beta, -2), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Când cei doi vectori formează o bază ortogonală? Pentru $\alpha = \beta = 1$ să se arate că cei doi vectori au lungimile egale (normele egale).

<u>Răspuns.</u> Se impune condiţia $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \beta = 4\alpha$.
Pentru $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow \|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = \sqrt{5}$.

TEMA NR 3

3. Fie vectorii din $\mathbb{R}^3$:

a) $\vec{v}_1 = (1,-1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1,1)$, $\vec{v}_3 = (\alpha, \beta, -1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

b) $\vec{w}_1 = (1,0,-1)$, $\vec{w}_2 = (1, \lambda, 1)$, $\vec{w}_3 = (1, 2, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Pentru ce valori ale parametrilor reali α, β, respectiv λ, μ vectorii sistemului $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, respectiv $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ sunt ortogonali doi câte doi?

Răspuns. a) $\alpha = 2$, $\beta = 1$; b) $\lambda = -1$, $\mu = 1$.

4. Să se arate că aplicația "$\cdot$": $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin

(*) $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 x_2 y_2$, unde $\vec{x} = (x_1, x_2)_{\mathcal{B}}$, $\vec{y} = (y_1, y_2)_{\mathcal{B}}$ iar $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ este o bază oarecare (nu neapărat cea canonică) din $\mathbb{R}^2$, este un produs scalar pe (în) $\mathbb{R}^2$.

În spațiul euclidean $(\mathbb{R}^2, "\cdot")$, unde produsul scalar este cel de mai sus, să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{x} = (1,1)_{\mathcal{B}}$, $\vec{y} = (-3, 2)_{\mathcal{B}}$, normele (lungimile) acestora, precum și unghiul dintre ei.

Răspuns. Se arată că aplicația (*) satisface axiomele din definiția produsului scalar pe un spațiu vectorial real (vezi notițe curs). Apoi, $\vec{x} \cdot \vec{y} = 4$; $\|\vec{x}\| = \sqrt{5}$; $\|\vec{y}\| = \sqrt{5}$; $\cos(\widehat{\vec{x},\vec{y}}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$
$= \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$.

TEMA NR. 3

5. Să se arate că vectorii $\vec{f_1}=(1,1,-1)$, $\vec{f_2}=(-1,1,1)$ și $\vec{f_3}=(1,0,1)$ sunt liniar independenți și apoi ortonormați baza formată cu aceștia în $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare. Pentru independența liniară a sistemului de vectori $\mathcal{B}'=\{\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}\}$ scriem matricea C de trecere de la baza canonică $\mathcal{B}=\{\vec{e_1}=(1,0,0), \vec{e_2}=(0,1,0), \vec{e_3}=(0,0,1)\}$ din $\mathbb{R}^3$ la sistemul $\mathcal{B}'$. Avem "schema"

$$\mathcal{B} \xrightarrow{\quad C \quad} \mathcal{B}'$$

și se știe că matricea C are pe coloane coordonatele vectorilor $\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}$ în baza $\mathcal{B}$. Deci

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se știe de asemenea că $\mathcal{B}'$ este bază în $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$

$$\det C \neq 0.$$

Avem $\det C = 4 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}'$ este bază în $\mathbb{R}^3$.

De la sistemul de vectori $\mathcal{B}'$ trecem la sistemul de vectori $\mathcal{B}''=\{\vec{g_1},\vec{g_2},\vec{g_3}\}$ ai căror vectori dorim să fie ortogonali doi câte doi. Nu ne împiedică nimic să luăm

$$\begin{cases} \vec{g_1}=\vec{f_1} \\ \vec{g_2}=\vec{f_2}-\alpha_{21}\vec{g_1} \\ \vec{g_3}=\vec{f_3}-\alpha_{31}\vec{g_1}-\alpha_{32}\vec{g_2} \end{cases}$$

Impunând condițiile: $\vec{g_1}\perp\vec{g_2}$ și $\vec{g_1}\perp\vec{g_3}$; $\vec{g_2}\perp\vec{g_3}$

TEMA NR 3

Din prima condiție obținem $\alpha_{21} = \frac{\vec{f}_2 \cdot \vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|^2}$ $= \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \vec{g}_2 = \vec{f}_2 + \frac{1}{3}\vec{f}_1 = (-1, 1, 1) +$ $+ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Așadar

$$\vec{g}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}(-1, 2, 1)$$

Rezultă $\|\vec{g}_2\| = \frac{2}{3}\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

Impunând condițiile de ortogonalitate $g_1 \perp g_2$ $(\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = 0)$ și $\vec{g}_1 \perp \vec{g}_3$ $(\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_3 = 0)$, obținem

$$\alpha_{31} = \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_1}{\|\vec{f}_1\|^2} \qquad \alpha_{32} = \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|^2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{31} = \frac{0}{\|\vec{f}_1\|^2} = 0, \quad \alpha_{32} = \frac{0}{\|\vec{g}_2\|^2} = 0,$$

prin urmare $\vec{g}_3 = \vec{f}_3$ și $\|\vec{f}_3\| = \|\vec{g}_3\| = \sqrt{2}$

Vectorii $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ sunt ortogonali doi câte doi, însă nu au normele egale cu unitatea din $\mathbb{R}$; $\|g_1\| = \|\vec{f}_1\| = \sqrt{3}$; $\|\vec{g}_2\| = \frac{2}{3}\sqrt{6}$ și $\|\vec{g}_3\| = \|\vec{f}_3\| = \sqrt{2}$.

Trecem la sistemul de vectori ortonormat prin $\vec{u}_1 = \frac{\vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|}$, $\vec{u}_2 = \frac{\vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|}$ și $\vec{u}_3 = \frac{\vec{g}_3}{\|\vec{g}_3\|}$. Obținem

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3 \\ \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3 \\ \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3 \end{cases}$$

Să se verifice că matricea de trecere de la baza canonică din $\mathbb{R}^3$ la sistemul de vectori $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ este ortogonală

TEMA NR. 3

6. Determinați valorile lui $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{f}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{f}_2 = (1, -1, 0)$, $\vec{f}_3 = (0, 0, \lambda)$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$.
Pentru $\lambda = 1$, ortonormați baza respectivă.

<u>Răspuns</u>. $\lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Baza ortonormată care se va găsi plecând de la baza (se ia $\lambda = 1$)

$$\vec{f}_1 = (1, 1, 0),\ \vec{f}_2 = (1, -1, 0),\ \vec{f}_3 = (0, 0, 1)$$

este

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2$$

$$\vec{u}_3 = (0, 0, 1) = \vec{e}_3.$$

<u>Observație</u> Baza $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ (care este ortonormată) se obține din baza canonică $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$, de asemeni ortonormată, printr-o rotație de 45° în jurul lui $\vec{e}_3$ care, după cum se vede din răspuns rămâne neschimbat în procesul de ortonormare.

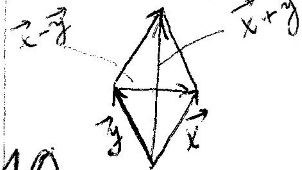
7. Arătați că vectorii $\vec{f}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{f}_2 = (1, -2, 0)$ și $\vec{f}_3 = (0, 0, 1) = \vec{e}_3$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$.
Ortonormați baza respectivă.
<u>Răspuns</u>. $\vec{g}_1 = \vec{f}_1$; $\vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \alpha_{21}\vec{g}_1 = (3, -3, 0)$, $\vec{g}_3 = \vec{f}_3$, iar baza ortonormată este $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3, -3, 0)$, $\vec{u}_3 = \vec{e}_3$.

8. Să se determine condiția în care vectorii $\vec{f}_1 = (1, 1, \lambda)$, $\vec{f}_2 = (1, \lambda, 1)$, $\vec{f}_3 = (\mu, 1, 1)$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$. Pentru $\lambda = -1$ și $\mu = 0$ să se ortonormeze baza respectivă.
<u>Răspuns</u>. $(\lambda - 1)[\mu(\lambda + 1) - 2] \neq 0$. Baza ortonormată este: $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)$, $\vec{u}_3 = 1/\sqrt{2}\,(0, 1, 1)$.

TEMA NR. 3

9. a) Să se arate că dacă norma unui vector provine dintr-un produs scalar și $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$ atunci $(\vec{x} - \vec{y}) \perp (\vec{x} + \vec{y})$. b) Explicați rezultatul.

<u>Răspuns</u> a) Se arată că $(\vec{x} - \vec{y})(\vec{x} + \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 = 0$



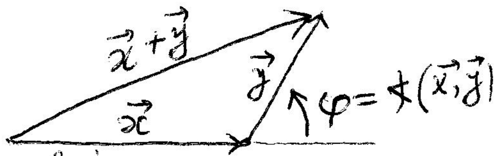
b) Într-un "romb" diagonalele sunt perpendiculare. Vezi desenul din stânga.

10. Să se arate că dacă $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$, unde prin $(\vec{x}, \vec{y})$ am notat produsul scalar al vectorilor $\vec{x}$ și $\vec{y}$ dintr-un spațiu vectorial euclidian real, iar $\|\vec{x}\|$ este norma (lungimea) vectorului $\vec{x}$, atunci

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2\right)$$

Dați o interpretare geometrică rezultatului.

<u>Răspuns</u>. Studiați desenul



și amintiți-vă de <u>teorema cosinusului</u>.

11. Să se demonstreze că într-un spațiu euclidian real V are loc egalitatea

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\left(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2\right).$$

Să se dea o interpretare geometrică rezultatului

<u>Răspuns</u> Studiați desenul. Ce figură geometrică reprezintă ABCD?