OPERATORI LINIARI

Probleme rezolvate

1. Să se arate că aplicația $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definită prin $T(\vec{x}) = (x_1, x_2, 2x_1 + 3x_2)$, unde $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, este operator liniar și să se scrie matricea operatorului relativ la bazele uzuale din $\mathbb{R}^2$, respectiv $\mathbb{R}^3$.

Rezolvare. Astfel de probleme se rezolvă ușor dacă se cunoaște următorul rezultat. Pentru a-l enunța, considerăm două spații vectoriale U și V peste același câmp de scalari $\mathbb{K}$, finit dimensionale, cu $\dim U = n$ și $\dim V = m$ și în care o pereche de baze $\mathcal{B} \subset U$ și $\mathcal{B}' \subset V$ au respectiv vectorii:

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \subset U;$$

$$\mathcal{B}' = \{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \dots, \vec{e}\,'_m\} \subset V.$$

Atunci orice vector $\vec{x} \in U$ și orice vector $\vec{y} \in V$ se scriu în mod unic în forma

$$(1) \qquad \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n = \vec{e}\,X$$

$$(2) \qquad \vec{y} = y_1\vec{e}\,'_1 + y_2\vec{e}\,'_2 + \dots + y_m\vec{e}\,'_m = \vec{e}\,'\,Y,$$

în care am făcut notațiile:

$$(3) \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}); \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{m\times 1} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$$

TEMA NR. 5
pagina 2

$$(4) \quad \begin{cases} \vec{e} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2 \cdots \vec{e}_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(U) \\ \vec{e}\,' = (\vec{e}\,'_1\ \vec{e}\,'_2 \cdots \vec{e}\,'_m) \in \mathcal{M}_{1,m}(\mathbf{V}) \end{cases}$$

Enunțul rezultatului (TEOREMĂ)

Aplicația $T : U \longrightarrow V$ este operator liniar dacă și numai dacă în perechea de baze $\{\mathcal{B}, \mathcal{B}'\}$, $\mathcal{B} \subset U$, $\mathcal{B}' \subset V$, există o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ astfel încât să aibă loc relația

$$(5) \quad T(\vec{x}) = \vec{e}\,'(AX), \ \forall \vec{x} \in U.$$

Demonstrație "$\Rightarrow$" Presupunem $T : U \rightarrow V$ aplicație liniară. Atunci

$$T(\vec{x}) = T(\vec{e}X) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i T(\vec{e}_i). \text{ Așadar}$$

$$(6) \quad T(\vec{x}) = x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \cdots + x_n T(\vec{e}_n).$$

Relația (6) arată că aplicația (funcția, legea, operația) T este cunoscută dacă se cunosc vectorii din V

$$(7) \quad T(\vec{e}_1);\ T(\vec{e}_2); \cdots; T(\vec{e}_n).$$

Vectorii din (7) pot fi exprimați în baza $\mathcal{B}'$:

$$(8) \quad \begin{cases} T(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e}\,'_1 + a_{21}\vec{e}\,'_2 + \cdots + a_{m1}\vec{e}\,'_m; \\ T(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{e}\,'_1 + a_{22}\vec{e}\,'_2 + \cdots + a'_{m2}\vec{e}\,'_m; \\ ----- \\ T(\vec{e}_n) = a_{1n}\vec{e}\,'_1 + a_{2n}\vec{e}\,'_2 + \cdots + a'_{mn}\vec{e}\,'_m, \end{cases}$$

OPERATORI LINIARI

unde $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Se observă că vectorii $T(\vec{e}_1)$, $T(\vec{e}_2), \ldots, T(\vec{e}_n)$ din V se pot scrie ca:

$$(9) \quad \begin{cases} T(\vec{e}_1) = \vec{e}\,' C_1 \\ T(\vec{e}_2) = \vec{e}\,' C_2 \\ \vdots \\ T(\vec{e}_n) = \vec{e}\,' C_n, \end{cases}$$

unde:

$$(10) \quad C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$$

sunt respectiv coloanele formate cu coordonatele în baza $\mathcal{B}'$ ale vectorilor din (8) sau (9).

Din (6), (8), (9), (10) deducem (5), unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

Pentru că orice vector dintr-un spațiu liniar finit dimensional are o scriere unică (coordonatele vectorului în acea bază sunt unice) rezultă că <u>matricea A este unică</u> (în perechea de baze $\mathcal{B} \subset U$ și $\mathcal{B}' \subset V$).

Se observă de asemenea că prima coloană din matricea A are elemente coordonatele vectorului $T(\vec{e}_1)$ în baza $\mathcal{B}'$, a doua coloană are ca elemente coordonatele vectorului $T(\vec{e}_2)$ în baza $\mathcal{B}'$ ş.a.m.d.

$\Leftarrow$ Presupunem (5) adevărată. Arătăm că $T: U \to V$ cu proprietatea (5) este un operator liniar. Pentru aceasta considerăm $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, scalari arbitrari, şi vectorii arbitrari $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$. Atunci

(11) $\vec{x}_1 = \vec{e}\,\underline{X}_1 \ , \quad \vec{x}_2 = \vec{e}\,\underline{X}_2,$

unde $\underline{X}_1, \underline{X}_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sînt matricele vectorilor $\vec{x}_1$ şi $\vec{x}_2$ în baza $\mathcal{B}$.

Din (5) şi (11) rezultă:

(12) $\begin{cases} T(\vec{x}_1) = \vec{e}\,'(\underline{A}\,\underline{X}_1); \\ T(\vec{x}_2) = \vec{e}\,'(\underline{A}\,\underline{X}_2). \end{cases}$

Vectorul $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2$ are coordonatele alcătuite din coordonatele vectorilor $\vec{x}_1$ şi $\vec{x}_2$ şi anume

(13) $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 = \vec{e}(\lambda_1\underline{X}_1 + \lambda_2\underline{X}_2)$

Din (5) şi (13) rezultă

(14) $T(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2) = \vec{e}\,'\left(\underline{A}(\lambda_1\underline{X}_1 + \lambda_2\underline{X}_2)\right).$

Dar, din proprietăţile operaţiilor cu matrice, avem

(15) $\underline{A}(\lambda_1\underline{X}_1 + \lambda_2\underline{X}_2) = \lambda_1(\underline{A}\,\underline{X}_1) + \lambda_2(\underline{A}\,\underline{X}_2)$

Din (12)–(15) rezultă

(16) $T(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2) = \lambda_1 T(\vec{x}_1) + \lambda_2 T(\vec{x}_2),$

ceea ce arată că $T: U \to V$ este operator liniar.

TEMA NR. 5

pagina 5

OPERATORI LINIARI

Acum, putem trece la rezolvarea efectivă a problemei 1 aplicând rezultatul demonstrat.

Observăm că

$$T(\vec{x}) = x_1\vec{e}\,'_1 + x_2\vec{e}\,'_2 + (2x_1+3x_2)\vec{e}\,'_3$$

unde

$$\mathcal{B}' = \{\vec{e}\,'_1 = (1,0,0),\ \vec{e}\,'_2 = (0,1,0),\ \vec{e}\,'_3 = (0,0,1)\}$$

este baza canonică (standard, uzuală, Euclidiană) din $\mathbb{R}^3$.

Numerele reale x_1 și x_2 sunt coordonatele vectorului $\vec{x}$ în baza canonică din $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0),\ \vec{e}_2 = (0,1)\}$$

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = (x_1, x_2) = \vec{e}\,\underline{X},$$

unde

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

și

$$\vec{e} = (\vec{e}_1\ \ \vec{e}_2) \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R}^2)$$

Se observă că $T(\vec{x})$ se scrie ca

$$T(\vec{x}) = \vec{e}\,'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1+3x_2 \end{pmatrix}$$

unde $\vec{e}\,' = (\vec{e}\,'_1\ \vec{e}\,'_2\ \vec{e}\,'_3) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}^3)$

De asemeni, observăm că

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1+3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{A}\,\underline{X}$$

Prin urmare, avem $T(\vec{x}) = \vec{e}\,'(\underline{A}\,\underline{X})$, unde

TEMA NR. 5

pagina 6

OPERATORI LINIARI

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

este matricea aplicației T în perechea de baze canonice $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ și $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^3$, iar $\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ este matricea coloană a coordonatelor vectorului arbitrar $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

Conform rezultatului prezentat mai sus, deducem că T este operator liniar.

Mai mult, prima coloană a lui A reprezintă coloana coordonatelor vectorului $T(\vec{e}_1)$ în baza $\mathcal{B}'$, iar a doua coloană a lui A are ca elemente coordonatele vectorului $T(\vec{e}_2)$ în aceeași bază $\mathcal{B}'$.

Putem scrie deci

$$T(\vec{e}_1) = \vec{e}\,'_1 + 2\vec{e}\,'_3 = (1, 0, 2)$$

$$T(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + 3\vec{e}\,'_3 = (0, 1, 3).$$

② Se consideră aplicațiile (funcțiile vectoriale de argument vectorial)

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T_1(\vec{x}) = (x_1 - x_2, 2x_2)$$

$$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T_2(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2, 3x_1).$$

a) Să se arate că T_1 și T_2 sunt operatori liniari;

b) Să se determine funcțiile compuse $T_1 \circ T_2$ și $T_2 \circ T_1$ și să se arate că acestea sunt de asemenea operatori liniari.

TEMA NR. 5

OPERATORI LINIARI

__Rezolvare.__ a) Aplicăm rezultatul demonstrat la exercițiul precedent. Avem

$$T_1(\vec{x}) = \vec{e}\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \vec{e}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{e}(A_1 X)$$

unde $\vec{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^2$, X este matricea coloană a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în baza $\mathcal{B}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ este matricea aplicației T_1 în baza $\mathcal{B}$. Aici se subînțelege că baza $\mathcal{B}'$ din teorema demonstrată coincide cu baza $\mathcal{B}$ (întrucât $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$), prin urmare putem afirma că A_1 __este matricea aplicației T_1 în baza $\mathcal{B}$__.

Rezultă că T_1 este operator liniar.

Analog se arată că T_2 este op. lin., matricea sa în baza canonică din $\mathbb{R}^2$ fiind

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $(T_1 \circ T_2)(\vec{x}) \overset{def}{=} T_1(T_2(\vec{x})) = T_1(\vec{e}(A_2 X)) =$

$$= \vec{e}(A_1(A_2 X)) = \vec{e}((A_1 \cdot A_2) X),$$ de

unde rezultă că $T_1 \circ T_2$ este operator liniar.

Analog, $(T_2 \circ T_1)(\vec{x}) = \vec{e}((A_2 \cdot A_1) X)$, unde

$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ și $A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, sau

$(T_1 \circ T_2)(\vec{x}) = (-2x_1 + 2x_2, 6x_1)$

$(T_2 \circ T_1)(\vec{x}) = (x_1 + 3x_2, 3x_1 - 3x_2)$.

Remarcăm că operația de __compunere__ a operatorilor nu este comutativă (produsul a două matrice nu este în general comutativ).

TEMA NR. 5

OPERATORI LINIARI

(3) Să se verifice dacă aplicațiile $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ date prin:

a) $T(\vec{x}) = (x_1 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ x_2,\ 3x_1 - x_2 + x_3)$;

b) $T(\vec{x}) = (x_1,\ x_2 + 1,\ x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$;

c) $T(\vec{x}) = (x_1 + x_2,\ x_1 + x_3,\ (x_3)^2,\ (x_1)^2 - (x_2)^2)$

sunt operatori liniari. În caz afirmativ să se scrie matricea operatorului în perechea de baze canonice $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ și $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^4$.

Răspuns. Doar aplicația de la punctul a) este operator liniar, pentru că se poate scrie în forma $T(\vec{x}) = \vec{e}\,'(AX)$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = \vec{e}\,X.$$

(4) Fie $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ o bază (nu neapărat baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$) și operatorul liniar $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pentru care: $T(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$; $T(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$; $T(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Să se scrie matricea A a operatorului în baza $\mathcal{B}$.

Rezolvare. Conform rezultatului demonstrat la exercițiul (1), avem: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (coloanele matricei sunt alcătuite cu coordonatele vectorilor $T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2), T(\vec{e}_3)$).

TEMA NR. 5

OPERATORI LINIARI

(5) Fie aplicația $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită prin
$T(\vec{x}) = (x_1, x_1 + x_2 - x_3, 0)$

a) Să se arate că T este operator liniar;

b) Să se scrie matricea B a operatorului T în baza $\mathcal{B}' = \{\vec{f}_1 = (2,1,1), \vec{f}_2 = (1,1,0), \vec{f}_3 = (1,1,-1)\}$ din $\mathbb{R}^3$.

c) Să se afle nucleul și imaginea lui T.

Rezolvare a) Se vede imediat că

$$T(\vec{x}) = \vec{e}\,(\underline{A}\underline{X}),$$

unde $\vec{e} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ este matricea lui T în baza $\mathcal{B}$. Conform rezultatului $\Rightarrow T$ op. lin.

Fie C matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$. Scriem $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$. Se știe că, pe coloane, matricea C are coordonatele vectorilor $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ în baza $\mathcal{B}$. Deci

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$ Avem $\boxed{\vec{f} = \vec{e}\,C}$

Dacă B este matricea lui T în baza $\mathcal{B}'$, atunci $T(\vec{x}) = \vec{f}\,(B\underline{X}')$, unde $\underline{X}'$ este matricea coloană a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în baza $\mathcal{B}'$. Se știe că $\boxed{\underline{X}' = C^{-1}\underline{X}}$

Atunci $T(\vec{x}) = (\vec{e}\,C)(B(C^{-1}\underline{X})) = \vec{e}((CBC^{-1})\underline{X}) \Rightarrow$
$A = CBC^{-1} \Rightarrow \boxed{B = C^{-1}AC}$. În acest fel am

TEMA NR. 5

pagina 10

OPERATORI LINIARI

demonstrat că legea de schimbare a matricei unui operator liniar $T: U \to U$ (care, în acest caz, este denumit și transformare liniară sau endomorfism) la o schimbare a bazei după schema $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$, unde C este o matrice pătratică de dimensiune $n \times n$, nesingulară desigur, este dată de

$$\boxed{B = C^{-1}AC},$$

unde B este matricea operatorului liniar T în noua bază $\mathcal{B}'$.

Calculăm inversa matricei C. Deoarece $\det C = -1$ rezultă că există inversa C^{-1}. Scriem transpusa matricei C

$$C^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

și calculăm adjuncta $C^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Rezultă $C^{-1} = \frac{1}{\det C} C^* \Rightarrow$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aplicăm formula $B = C^{-1}AC \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare: $T(\vec{f}_1) = 2\vec{f}_2$; $T(\vec{f}_2) = -\vec{f}_1 + 4\vec{f}_2 - \vec{f}_3$ și $T(\vec{f}_3) = -2\vec{f}_1 + 7\vec{f}_2 - 2\vec{f}_3$.

TEMA NR. 5

pagina 11

OPERATORI LINIARI

c) Conform definiției, nucleul operatorului T este
$$Ker\,T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

Din $T(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 = \lambda \end{cases}$

$\Rightarrow \forall\, \vec{x} \in Ker\,T$ are forma $\vec{x} = (0, \lambda, \lambda) =$
$= \lambda(0, 1, 1) = \lambda \vec{u}$, unde $\vec{u} = (0, 1, 1)$.

Putem spune că $Ker\,T$ este subspațiul liniar generat de vectorul $\vec{u}$, sau de mulțimea formată din vectorul $\vec{u}$, notată $\{\vec{u}\}$. Subspațiul generat de un sistem S de vectori (numit și înfășurătoarea liniară a lui S sau "span"-ul lui S) se notează $[S]$. Prin urmare,
$$Ker\,T = [\{\vec{u}\}].$$

Cum $\vec{u} = (0, 1, 1) \neq \vec{0}$ rezultă că $\dim Ker\,T = 1$, iar o bază în $Ker\,T$ este formată din vectorul $\vec{u}$.

Pentru imaginea operatorului $Im\,T$ trebuie să găsim toți vectorii $\vec{y}$ pentru care există $\vec{x}$ astfel încât $T(\vec{x}) = \vec{y}$, adică $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = y_2 \\ 0 = y_3 \end{cases}$

$Im\,T = \{\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 = x_1,\ y_2 = x_1 + x_2 - x_3,\ y_3 = 0\}$

sau

$Im\,T = \{(x_1, x_1 + x_2 - x_3, 0) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

Notând $x_1 = \alpha$ și $x_2 - x_3 = \beta$ rezultă că

$Im\,T = \{(\alpha, \alpha + \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\vec{y} = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,0)\}$

adică $Im\,T$ este generat de vectorii $\vec{v}_1 = (1,1,0)$ și $\vec{v}_2 = \vec{e}_2$ ceea ce arată că $\dim Im\,T = 2$, o bază în $Im\,T$ fiind $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

TEMA NR. 5

OPERATORI LINIARI

(6). Fie operatorul liniar $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit de
$T(\vec{x}) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$,
unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Să se determine rangul și defectul acestui operator liniar.

<u>Rezolvare</u> Se observă că $T(\vec{x}) = \vec{e}(A\underline{X})$ unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ este matricea operatorului liniar T în baza canonică $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$, $\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ este matricea coloană a coordonatelor vectorului $\vec{x}$ în baza canonică, iar $\vec{e} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}^3)$.

<u>Ecuația vectorială</u> a operatorului este

$$\vec{y} = T(\vec{x})$$

Pentru că $\vec{y} = \vec{e}\,\underline{Y}$ și $T(\vec{x}) = \vec{e}(A\underline{X})$, rezultă că

$$\underline{Y} = A\underline{X}$$

este <u>ecuația matriceală</u> a operatorului liniar T, iar

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

sunt <u>ecuațiile scalare</u> ale lui T.

Defectul operatorului liniar T se notează cu d și este prin definiție dimensiunea subspațiului $\mathrm{Ker}\,T$, iar rangul se notează cu r și $r = \dim \mathrm{Im}\,T$.

Se poate demonstra că $\boxed{r + d = n}$ și că

$r = \text{rang } A$. Se vede că $\text{rang } A = 1$, deci $d = n - r = 3 - 1 = 2$.

(4). Fie operatorul liniar $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cu proprietatea $T(1,2) = (5,0)$ și $T(2,1) = (4,3)$.

Care este expresia lui T? Să se calculeze $T(-2,3)$.

<u>Soluție</u> T este cunoscut dacă se cunoaște matricea sa într-o bază (de exemplu cea canonică). Coloanele acestei matrice sunt coordonatele lui $T(\vec{e}_1)$ și $T(\vec{e}_2) \in \mathbb{R}^2$.

Din $\begin{cases} T(1,2) = (5,0) \\ T(2,1) = (4,3) \end{cases}$ obținem

$$\begin{cases} T(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = 5\vec{e}_1 \\ T(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \end{cases} \quad \text{sau}$$

$$\begin{cases} T(\vec{e}_1) + 2T(\vec{e}_2) = 5\vec{e}_1 \\ 2T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_2) = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \end{cases}$$

Adunând ecuațiile obținem $T(\vec{e}_1) + T(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Folosind această relație în fiecare ecuație din ultimul sistem, obținem

$$\begin{cases} T(\vec{e}_2) = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ T(\vec{e}_1) = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} T(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \\ T(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ecuația vectorială a operatorului T este

$$\vec{y} = T(\vec{x}).$$

Ecuația matriceală a operatorului liniar T este

$$\underline{Y} = \underline{A}\,\underline{X},$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ecuațiile scalare ale operatorului liniar T sunt

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = 2x_1 - x_2 . \end{cases}$$

Putem calcula acum $T(-2,3)$. Putem folosi fie ecuațiile scalare, fie ecuația matriceală. Avem

$$\begin{cases} y_1 = -2 + 2\cdot 3 = 4 \\ y_2 = -4 - 3 = -7 \end{cases}$$

Prin urmare $T(-2,3) = (4,-7) = 4\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2$.

(8). Fie operatorii liniari $T_1 : R^3 \to R^3$ și $T_2 : R^3 \to R^3$, care în baza canonică din R^3 au matricele

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ respectiv } A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Să se determine matricea lui T_1 în baza $\mathcal{B}' = \{\vec{f}_1 = (2,1,-2),\ \vec{f}_2 = (1,0,1),\ \vec{f}_3 = (0,2,-7)\}$;

b) Să se determine imaginea vectorului $\vec{v} = (1,2,-2)$ prin operatorii U_2, $U_1 + U_2$, $U_2 \circ U_1$ și $U_1 \circ U_2$.

<u>Rezolvare</u> a) $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$, unde $\mathcal{B}$ este baza canonică din R^3, iar C este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$.

OPERATORI LINIARI

Conform regulii de alcătuire a matricei C avem

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Inversa acestei matrice este

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -2 \\ -3 & 14 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci matricea operatorului T_1 în baza $\mathcal{B}'$ este $B = C^{-1} A C$

Efectuând produsele de matrice, găsim

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare:
$$\begin{cases} T_1(\vec{f}_1) = 2\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 - \vec{f}_3 \\ T_1(\vec{f}_2) = -\vec{f}_1 + 3\vec{f}_2 + \vec{f}_3 \\ T_1(\vec{f}_3) = 3\vec{f}_1 - 6\vec{f}_2 - 3\vec{f}_3 \end{cases}$$

b) Avem $\vec{v} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = \vec{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{e}\,V$

Atunci $T_2(\vec{v}) = \vec{e}\,(AV) =$

$$= \vec{e}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{e}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T_2(\vec{v}) = 4\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Se poate calcula $T_2(\vec{v})$ mai simplu astfel:

$$T_2(\vec{v}) = T_2(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3) = T_2(\vec{e}_1) + 2T_2(\vec{e}_2) - 2T_2(\vec{e}_3) =$$
$$= 2e_1 + e_2 + 2\vec{e}_3 +$$
$$+ 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 -$$
$$- 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = 4\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Operatorul liniar $T_1 + T_2$ are, în baza $\mathcal{B}$, matricea $A_1 + A_2$.

OPERATORI LINIARI

Dar

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Atunci

$$(T_1 + T_2)(\vec{v}) = \vec{e}\big((A_1 + A_2)V\big) =$$

$$= \vec{e}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{e}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(T_1 + T_2)(\vec{v}) = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3.$$

Se poate face și altfel folosind faptul că $(T_1 + T_2)(\vec{v}) = T_1(\vec{v}) + T_2(\vec{v})$ (regula de adunare a două funcții).

Operatorii liniari $T_1 \circ T_2$ și $T_2 \circ T_1$ au respectiv matricele $A_1 \cdot A_2$ și $A_2 \cdot A_1$.

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(T_1 \circ T_2)(\vec{v}) = \vec{e}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{e}\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix} =$$

$$= 4\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 - 11\vec{e}_3.$$

$$(T_2 \circ T_1)(\vec{v}) = \vec{e}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{e}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= 4\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$$

Se vede ca $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$ pentru că A_1 nu comută (la înmulțire) cu A_2.

TEMA NR. 5

OPERATORI LINIARI

9. Să se arate că operatorul liniar $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\vec{x}) = (x_1+x_2-2x_3, x_2, x_1-x_2)$ este bijectiv.

Să se determine transformarea liniară inversă $T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Soluție. Pentru ca T să fie bijectiv trebuie ca T să fie surjectiv ($\mathrm{Im}\, T = \mathbb{R}^3$) și T să fie injectiv ($\mathrm{Ker}\, T = \{\vec{0}\}$).

În cazul de față e suficient să fie injectiv căci din relația $r+d=n$ rezultă $r=3$ deci $\dim \mathrm{Im}\, T = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ ceea ce arată că $T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ adică T este surjectiv.

Pentru a arăta că $\mathrm{Ker}\, T = \{\vec{0}\}$ trebuie să studiem sistemul liniar și omogen

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$$

și aceasta este singura soluție, ceea ce trebuia de demonstrat.

Pentru a găsi inversa trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_1 - x_2 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = -\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \frac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

Matricea lui T^{-1} este $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ care este de fapt A^{-1}.

TEMA NR. 5

pagina 18 OPERATORI LINIARI

(10). Fie dat operatorul liniar $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definit prin

$$T(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 - x_3,\ -x_1 + x_2 + 2x_3,\ x_2 - x_3)$$

unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Să se arate că T este bijecție;

b) Să se determine $T^{-1}(2,0,2)$, $T^{-1}(1,-1,0)$.

Soluție a) T este bijecție dacă și numai dacă $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$ sau matricea A în baza canonică $\mathcal{B}$ este inversabilă.

Avem $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \boxed{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -4$$

b)
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Rezultă că $T^{-1}(\vec{x}) = \vec{e}\,(A^{-1}X) \Rightarrow$

$$T^{-1}(2,0,2) = \frac{1}{4}\vec{e} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\vec{e} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \vec{e} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (-1, 1, -1).$$

Analog $T^{-1}(1,-1,0) = \vec{e}_1 = (1,0,0)$.

TEMA NR. 5

pagina 19

OPERATORI LINIARI

(11). Se consideră operatorul liniar $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin $T(\vec{x}) = (2x_1 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, 3x_3)$ unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Se cere:

a) Să se scrie matricea B a lui T în baza $\mathcal{B}' = \{\vec{f}_1 = (1,-1,-1), \vec{f}_2 = (-1,1,-1), \vec{f}_3 = (-1,-1,1)\}$

b) Să se afle $\operatorname{Ker} T$ și defectul lui T;

c) Să se determine $\operatorname{Im} T$, o bază a sa și rangul lui T.

Soluție. a) $B = C^{-1} A C$, unde $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ iar } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ este}$$

matricea lui T în baza canonică $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$. Inversa lui C se găsește că este

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectuând produsele de matrice $C^{-1} \cdot A \cdot C$ găsim

$$B = \begin{pmatrix} 5/2 & 1 & -3/2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

b) $\det A = 6 \neq 0$ deci $\exists A^{-1}$; prin urmare T este inversabilă ceea ce arată că $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$

Defectul lui T este dim $\operatorname{Ker} T = 0 \Rightarrow d = 0$

c) $d + r = n \Rightarrow r = 3$ (se știa asta)

$\Rightarrow \operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3$. O bază în $\operatorname{Im} T$ poate fi atât $\mathcal{B}$ cât și $\mathcal{B}'$. Dar există și altele.

TEMA NR. 5

pagina 20

(12) Se consideră funcția vectorială de argument vectorial $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definită prin:

$$T(\vec{x}) = (-x_1 + 4x_2 - 2x_3,\ -3x_1 + 4x_2,\ -3x_1 + x_2 + 3x_3)$$

unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

a) Arătați că T este operator liniar;

b) Determinați nucleul lui T;

c) Determinați valorile proprii ale lui T;

d) Găsiți vectorii proprii corespunzători;

e) Cercetați dacă mulțimea vectorilor proprii formează o bază în $\mathbb{R}^3$;

f) Scrieți matricea B a operatorului T în baza B' de la punctul precedent;

g) Ce formă are matricea B?

i) Cum explicați forma găsită la f)?

j) Găsiți inversul operatorului T, notat T^{-1};

k) Care vor fi valorile proprii ale lui T^{-1}?

l) Dar matricea lui T^{-1} în baza formată de vectorii proprii corespunzători valorilor proprii de la punctul k)?

<u>Soluție</u> a) Se observă că $T(\vec{x}) = \vec{e}(AX)$ unde $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Deci T - op. liniar;

b) $T(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ Determinantul sistemului este $\det A$

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 6 \\ -3 & -11 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -8 & 6 \\ -11 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 11 & 9 \end{vmatrix} = 72 - 66 = 6 \neq 0$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$.

OPERATORI LINIARI

c) Se știe că scalarul λ este <u>valoare proprie</u> a operatorului liniar T dacă $\exists\, \vec{x} \neq \vec{0}$ a.î. $T(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. Vectorul $\vec{x}$ se numește <u>vector propriu</u> corespunzător valorii proprii λ.

Egalitatea $T(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ este echivalentă cu $\underline{A}\,\underline{X} = \lambda \underline{I_3}\,\underline{X}$ sau

$$(\underline{A} - \lambda \underline{I_3})\underline{X} = 0 \text{ (matricea coloană nulă)}$$

Ecuația de mai sus are soluții $\underline{X} \neq 0$ dacă și numai dacă

$$\det(A - \lambda I_3) = 0$$

sau

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ -3 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dezvoltând determinantul, găsim

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$$

Această ecuație se numește <u>ecuația caracteristică</u> a op. lin T sau a matricei $\underline{A}$. Polinomul din primul membru al ecuației se numește <u>polinom caracteristic</u> al matricei A sau a endomorfismului T.

Ecuația caracteristică este echivalentă cu

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

care are rădăcinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Acestea sunt valorile proprii căutate.

TEMA NR. 5

pagina 22

OPERATORI LINIARI

d) Vectorul propriu corespunzător valorii proprii λ_1 se determină din sistemul

$$(A - \lambda_1 I_3)X = 0,$$

adică

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_1 = (1,1,1)$$

Analog se găsesc ceilalți doi vectori proprii $\vec{v}_2 = (2,3,3)$ și $\vec{v}_3 = (1,3,4)$ corespunzători valorilor proprii $\lambda_2 = 2$ și $\lambda_3 = 3$. Adică avem:

$$(*) \quad T(\vec{v}_1) = 1 \cdot \vec{v}_1\,;\ T(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2\,;\ T(\vec{v}_3) = 3\vec{v}_3.$$

e) $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Atunci matricea de trecere $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$ este $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ și are $\det C = 1 \neq 0$ deci $\mathcal{B}'$ este bază.

f) Fie B matricea lui T în baza $\mathcal{B}'$.
Se poate găsi B fie folosind regula $B = C^{-1}AC$ fie observând că avem $T(\vec{v}_1)$, $T(\vec{v}_2)$, $T(\vec{v}_3)$ (vezi (*)). Atunci

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

g) Matricea lui T în bază $\mathcal{B}'$ are formă diagonală.

i) Explicația este dată de relațiile (*).

TEMA NR. 5

pagina 23

OPERATORI LINIARI

j) T este inversabil pentru că $\det A = 6 \neq 0$.
Inversul T^{-1} se găsește rezolvând sistemul

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = y_1 \\ \boxed{-3x_1} + 4x_2 = y_2 \\ \boxed{-3x_1} + x_2 + 3x_3 = y_3 \end{cases}$$

Aplicăm "metoda eliminării" a lui Gauss pentru a afla unica soluție a sistemului.

Operând cu prima ecuație, se obține sistemul echivalent

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = y_1 \\ \quad -8x_2 + 6x_3 = -3y_1 + y_2 \\ \quad -11x_2 + 9x_3 = -3y_1 + y_3 \end{cases}$$

Renunțând la factorul -8 din a doua ecuație, obținem un alt sistem echivalent cu celelalte

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = y_1 \\ \quad x_2 - \frac{3}{4}x_3 = \frac{3}{8}y_1 - \frac{1}{8}y_2 \\ \quad \boxed{-11x_2} + 9x_3 = -3y_1 \end{cases}$$

Operăm cu a doua ecuație pentru a face zero în locul indicat. Obținem

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = y_1 \\ \quad x_2 - \frac{3}{4}x_3 = \frac{3}{8}y_1 - \frac{1}{8}y_2 \\ \quad \frac{3}{4}x_3 = \frac{9}{8}y_1 - \frac{11}{8}y_2 + y_3 \end{cases}$$

TEMA NR. 5

pagina 24

OPERATORI LINIARI

Din ultima ecuatie rezultă x_3. Introducând valoarea găsită a lui x_3 în ecuația a doua, determinăm pe x_2. Din prima ecuatie se va găsi apoi x_1. Prin urmare, soluția sistemului este dată de

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - \frac{7}{3}y_2 + \frac{4}{3}y_3 \\ x_2 = \frac{3}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2 + y_3 \\ x_3 = 2y_1 - \frac{7}{3}y_2 + \frac{4}{3}y_3 \end{cases}$$

Rezultatul dobândit arată că dacă am fi adoptat metoda matriceală de rezolvare (sistemul se scrie $\underline{A}\underline{X} = \underline{Y} \Rightarrow \underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{Y}$) matricea inversă a lui A trebuie să fie

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ 2 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Operatorul invers T^{-1} are ecuatia vectorială $\vec{y} = \vec{e}(A^{-1}X)$,

ecuatia matriceală $\underline{Y} = \underline{A}^{-1}\underline{X}$ și ecuatiile scalare

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - \frac{7}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 \\ y_2 = \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + x_3 \\ y_3 = 2x_1 - \frac{7}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 \end{cases}$$

OPERATORI LINIARI

k) Ca să găsim valorile proprii ale lui T^{-1} ar trebui să impunem condiția ca ecuația matriceală $A^{-1}X = \lambda I_3 X$ să aibă soluții nebanale. Ecuația însă este echivalentă cu $\frac{1}{\lambda} I_3 X = AX$. De aici rezultă că dacă μ este valoare proprie pentru T, atunci $\frac{1}{\mu}$ este valoare proprie pentru T^{-1}. Prin urmare, valorile proprii ale lui T^{-1} sunt
$$\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \text{ și } \frac{1}{1} = 1.$$

l) Matricea lui T^{-1} în baza formată din vectorii proprii corespunzători valorilor proprii de mai sus este
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13) Să se arate că matricea transformării liniare $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dată de
$$T(\vec{x}) = (-3x_1 + 2x_2, -5x_1 + 4x_2, 2x_1 - 2x_2 - x_3),$$
unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, poate fi adusă la forma diagonală față de o bază din $\mathbb{R}^3$. Să se precizeze această bază.

Soluție. Se determină valorile proprii rezolvând ecuația caracteristică $\det(A - \lambda I_3) = 0$,

TEMA NR. 5

pagina 26

OPERATORI LINIARI

unde A este matricea lui T în baza canonică din $\mathbb{R}^3$, iar I_3 este matricea unitate de ordin 3.

Matricea A este

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 0 \\ -5 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda+1)\begin{vmatrix} -(\lambda+3) & 2 \\ -5 & -(\lambda-4) \end{vmatrix} = -(\lambda+1)\left[(\lambda+3)(\lambda-4)+10\right] =$$

$$= -(\lambda+1)\left[\lambda^2 - \lambda - 12 + 10\right] = -(\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 2) =$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-2).$$

Prin urmare valorile proprii sunt $\lambda = -1$, dublă, și $\lambda = 2$.

Determinăm vectorii proprii corespunzători

Pentru $\lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -5x_1 + 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{matrix}$

$\Rightarrow \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (\alpha, \alpha, \beta) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,0,1) \Rightarrow$

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii duble $\lambda = -1$ sunt $\vec{v}_1 = (1,1,0)$, $\vec{v}_2 = (0,0,1)$.

Pentru $\lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = 0 \\ -5x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{5}x_2 \\ x_3 = -\frac{2}{5}x_2 \end{cases} \Rightarrow$ Vectorul propriu poate fi (se ia $x_2 = 5$)

$\vec{v}_3 = (2, 5, -2) \Rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bază și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

TEMA NR. 5

Probleme propuse cu indicații și răspunsuri

(1) Se consideră aplicația $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$T(\vec{x}) = (x_1,\ x_1+3x_2,\ x_1-x_3,\ -x_1)$, $\forall \vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$

Să se arate că T este operator liniar și să se scrie matricea A a lui T în perechea de baze canonice $\{\mathcal{B}, \mathcal{B}'\}$, unde $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^4$.

Indicație. Se aplică rezultatul prezentat în exercițiul (1) de la TEMA 5, pagina 1, probleme rezolvate.

Răspuns.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2). Să se arate că $T(\vec{x}) = (x_1+2x_2,\ 2x_1,\ x_2-x_3)$, unde $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ este operator liniar (transformare liniară, endomorfism) pe $\mathbb{R}^3$.

Să se găsească matricea lui T în baza

$\mathcal{B}' = \{\vec{f}_1 = (2,1,-1),\ \vec{f}_2 = (2,-1,2),\ \vec{f}_3 = (3,0,1)\}$.

Indicație. Fie B matricea lui T în baza $\mathcal{B}'$, adică T se scrie ca $T(\vec{x}) = \vec{f}(BX')$, unde $\vec{f} = (\vec{f}_1\ \vec{f}_2\ \vec{f}_3) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}^3)$, X' este matricea coloană a coordonatelor lui $\vec{x}$ în baza $\mathcal{B}'$.

Atunci $B = C^{-1}AC$, $\mathcal{B} \xrightarrow{C} \mathcal{B}'$ și A este matricea lui T în baza $\mathcal{B}$.

Răspuns. $B = \begin{pmatrix} -18 & -7 & -18 \\ -22 & -11 & -24 \\ 28 & 12 & 29 \end{pmatrix}$.

TEMA NR. 5

OPERATORI LINIARI

Probleme propuse cu indicații și răspunsuri

(3) Să se determine transformarea liniară (endomorfismul, operatorul liniar) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ știind că $T(1,-1) = (2,1)$ și $T(2,-1) = (3,1)$.

Indicație. Se utilizează datele problemei

$$\begin{cases} T(1,-1) = (2,1) \\ T(2,-1) = (3,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ T(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} T(\vec{e}_1) - T(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ 2T(\vec{e}_1) - T(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{cases} \Rightarrow T(\vec{e}_1),\ T(\vec{e}_2) \Rightarrow A$$

Răspuns $T(\vec{x}) = \vec{e}\,(AX)$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(4). Fie $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, operatorul liniar definit prin

$$T(\vec{x}) = (x_1 + x_2 + x_3,\ -x_3), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

Să se determine:

a) Nucleul $\operatorname{Ker} T$ a operatorului liniar T, $\dim \operatorname{Ker} T = d$ = defectul lui T și o bază în $\operatorname{Ker} T$;

b) Imaginea operatorului liniar T, $\operatorname{Im} T \subset \mathbb{R}^2$, $\dim \operatorname{Im} T$ = rang T și o bază în $\operatorname{Im} T$.

Răspuns. a) $\operatorname{Ker} T = \{\alpha(1,-1,0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; $\dim \operatorname{Ker} T = 1$; $\{\vec{u} = (1,-1,0)\}$ formează bază în $\operatorname{Ker} T$.

b) $\operatorname{Im} T = \{(\alpha+\beta, -\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,0) + \beta(1,-1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = 2$; $\{\vec{w}_1 = (1,0),\ \vec{w}_2 = (1,-1)\}$ bază în $\operatorname{Im} T$.

TEMA NR. 5

~~Pagina~~ 29

OPERATORI LINIARI

Probleme propuse cu indicații și răspunsuri

(5) Arătați că operatorul liniar (transformarea liniară, endomorfismul) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definit prin

$$T(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 - x_3,\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3,\ -x_1 - x_2 + 5x_3)$$

este inversabil, găsiți matricea lui T^{-1} în baza canonică din $\mathbb{R}^3$, ecuațiile scalare ale operatorului liniar $T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, precum și $T^{-1}(\vec{y}_0)$, unde $\vec{y}_0 = (0,1,1)$.

Indicație Se scrie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 5 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

matricea lui T în baza uzuală din $\mathbb{R}^3$. Se calculează $\det A$. Se arată că $\exists A^{-1}$ și se calculează A^{-1}. Se obține

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -9 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T^{-1}(\vec{x}) = (-10x_1 - 9x_2 + 7x_3,\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3,\ -x_1 - x_2 + x_3),\quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Răspuns: $T^{-1}(\vec{y}_0) = \vec{e}\,(A^{-1}Y_0) = \vec{e}\left(A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (-2, 1, 0).$

(6) Să se calculeze valorile proprii și vectorii proprii corespunzători ai endomorfismului $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\vec{x}) = (4x_1 + 6x_2,\ -3x_1 - 5x_2,\ x_3)$.

TEMA NR. 5

OPERATORI LINIARI

Probleme propuse cu indicații și răspunsuri

Răspuns. Valorile proprii sunt $\lambda = 1$, dublă, și $\lambda = -2$ simplă. Vectorii proprii corespunzători sunt:

$$\underbrace{\vec{v}_1 = (-2,1,0),\ \vec{v}_2 = (0,0,1)}_{\text{corespunzători lui } \lambda = 1},\ \underbrace{\vec{v}_3 = (1,-1,0)}_{\text{corespunzător lui } \lambda = 2}$$

(7) Se dă endomorfismul $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, unde

$$T(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2,\ x_1 + x_2 + x_3,\ 2x_2 + x_3),$$

unde $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Să se determine valorile și vectorii proprii și să se cerceteze dacă T este diagonalizabil.

Răspuns. $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = 3$

$\lambda_1 = 1 \Downarrow$ $\vec{v}_1 = (1,0,-1)$, $T(\vec{v}_1) = 1 \cdot \vec{v}_1$

$\lambda_2 = -1 \Downarrow$ $\vec{v}_2 = (1,-1,1)$, $T\vec{v}_2 = (-1)\vec{v}_2 = -\vec{v}_2$

$\lambda_3 = 3 \Downarrow$ $\vec{v}_3 = (1,1,1)$, $T(\vec{v}_3) = 3\vec{v}_3$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

unde B este matricea lui T în baza $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

(8) Să se cerceteze dacă matricea A a transformării liniare $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\vec{x}) = (4x_1 + 6x_2,\ -3x_1 - 5x_2,\ -3x_1 - 6x_2 + x_3)$ poate fi adusă la forma diagonală.

Răspuns. Da și $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.