

## LUCRAREA 2

### CALCULUL SISTEMULUI DE RULARE AL AUTOVEHICULELOR

#### 1. Scopul lucrării

Evidențierea componetelor forței de rezistență la deplasarea unui autovehicul și factori de influență asupra acestora.

Calculul forței de rezistență a roții pentru diverse condiții de deplasare (viteză, tipul de cale de rulare și starea acesteia, încărcarea roții, presiunea pneului și tipul acestuia, etc.).

Determinarea forței maxime de tracțiune dintre pneuri și suprafața drumului. Stabilirea puterii necesare la roțile motoare.

Calculul reacțiunilor normale la punțile automobilului.

#### 2. Elemente teoretice

*Puterea necesară la roțile motoare* se determină din rezistența la deplasare.

Posibilitatea deplasării unui autovehicul apare ca efect al utilizării energiei transmise la roțile motoare, iar caracterul mișcării este determinat de mărimea și sensul forțelor care acționează asupra lui (forța de tracțiune, rezistențele la înaintare, reacțiunile drumului și forța de inerție) care influențează și stabilitatea autovehiculului în timpul mișcării.

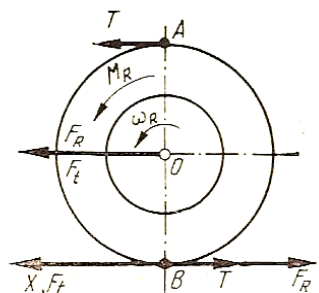
Mișcarea autovehiculului este posibilă atunci când la roțile motoare se transmite un moment activ suficient de mare pentru a învinge rezistențele la înaintare și a asigura deplasarea acestuia.

*Momentul la roată  $M_R$*  reprezintă momentul activ transmis roților motoare, iar puterea corespunzătoare care se utilizează la autopropulsarea autovehiculului se numește de *putere la roată  $P_R$*  și se calculează cu relațiile:

$$P_R = P_{em} \cdot \eta_{tr} \quad \text{și} \quad M_R = M_{em} \cdot i_{tr} \cdot \eta_{tr} \quad (2.1)$$

în care:  $i_{tr}$  – raportul total al întregii transmisii,  $\eta_{tr}$  – randamentul global al transmisiilor autovehiculului.

În figura 2.1 este reprezentată *schema forțelor care acționează asupra roții unui autovehicul* și produc momentul  $M_R$ , cu următoarele notații:  $T$  – forțe periferice aplicate diametral opus pe circumferința roții în punctele A și B,  $F_R$  – forțe tangențiale cu sensuri contrare aplicate în punctul de contact cu drumul B, respectiv în centrul roții.



**Fig. 2.1** – Acțiunea forțelor asupra roții autovehiculelor.

*Forța tangențială la roată* se determină cu relația (valabilă pentru un regim constant de deplasare):

$$F_R = \frac{M_R}{r} = \frac{M_{em} \cdot i_{tr} \cdot \eta_{tr}}{r} \quad (2.2)$$

unde:  $r$  – raza roții, fiind orientată în sens opus mișcării deoarece reprezintă acțiunea roții motoare asupra drumului.

Deoarece greutatea autovehiculului încarcă roțile motoare, forța la roată  $F_R$  dă naștere la o reacțiune tangențială  $X$  (acțiunea drumului asupra roții), care împiedică alunecarea dintre roată și sol. Rezultă că rularea roții pe sol este posibilă prin dezvoltarea în centrul ei a unei forțe de împingere paralelă cu drumul, transmisă autovehiculului prin lagărul roții și care însumată pentru toate roțile motoare constituie *forța de tracțiune*  $F_t$  care îi asigură deplasarea (figura 2.1). Forța de tracțiune se consideră aplicată în centrul de greutate al autovehiculului, raportul dintre mărimea ei și rezistențele la înaintare determinând caracterul concret al mișcării.

Autovehiculul are *roți elastice* care rulează pe drumuri mai mult sau mai puțin deformabile, din care cauză o parte din puterea transmisă roților se pierde la învingerea frecărilor și rezistențelor opuse la deformarea pneurilor și a drumurilor. Această pierdere de energie în procesul rulării constituie așa-numita *rezistență la rulare*  $F_r$  (forță care diminuează forța de tracțiune). Rezultă că pentru roțile cu pneuri elastice forța de tracțiune  $F_t$  este mai mică decât forța la roată  $F_R$  cu mărimea forței de rezistență la rulare  $F_r$ :

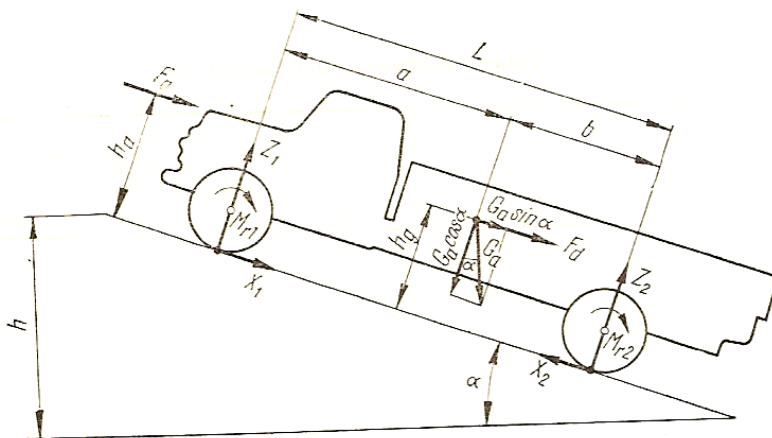
$$F_t = F_R - F_r \quad (2.3)$$

Calitățile de tracțiune sunt determinate de mărimea momentului la roată și a forței de tracțiune, care depind de *puterea specifică* (puterea masică) a autovehiculului  $P_s$  dată de raportul dintre puterea maximă a motorului  $P_m$  și masa autovehiculului  $m_a$ :

$$P_s = \frac{P_m}{m_a} \quad [\text{kW/t}] \quad (2.4)$$

### 3. Calculul forțelor de rezistență la deplasarea autovehiculului

*Forța totală la roată* obținută prin însumarea forțelor tangențiale de la toate roțile motoare ale autovehiculului se utilizează la învingerea rezistențelor la deplasare (figura 2.2) și anume: rezistența la rulare  $F_r$ , rezistența la urcarea pantei  $F_p$ , rezistența aerului  $F_a$  și rezistența la accelerare  $F_d$ .



**Fig. 2.2** – Componentele rezistenței la deplasare a autovehiculului.

În figura 2.2 s-au utilizat notațiile:  $G_a$  – greutatea autovehiculului;  $X_{1,2}$  – forțe de frecare cu drumul;  $Z_{1,2}$  – reacțiuni normale pe roți;  $l$  – distanța longitudinală între roți;  $a, b$  – distanțele dintre centrul de greutate și roți;  $h_g$  – înălțimea centrului de greutate;  $h$  – înălțimea de urcare;  $\alpha$  – unghiul de înclinare a pantei.

Pentru calculul rezistenței la deplasare se utilizează relația:

$$F_R = F_r \pm F_p + F_a \pm F_d \quad (2.5)$$

Rezistența la rulare  $F_r$  și rezistența aerului  $F_a$  sunt întotdeauna forțe care se opun mișcării autovehiculului. Rezistența datorată pantei  $F_p$  se opune mișcării la urcarea ei, iar la coborâre devine forță activă. Rezistența la accelerare  $F_d$  acționează asupra autovehiculului numai în timpul mișcării cu regim tranzitoriu ( $v_a \neq \text{const.}$ ) și este întotdeauna de semn opus accelerației (la demarare acționează ca forță de rezistență, la frânare ca forță activă).

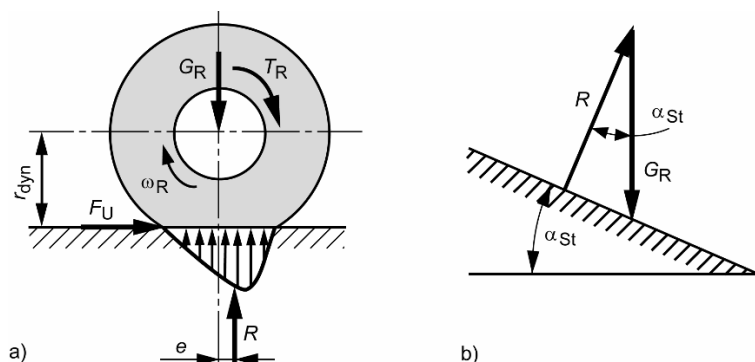
### 3.1. Rezistența la rulare a roților

*Rezistența la rulare* se manifestă în momentul în care roata începe să se rotească și vine în contact cu calea (pe drum orizontal reprezintă rezistența cea mai importantă până la viteze de 60 ... 80 km/h).

În procesul rulării, atât roțile cât și drumul sunt supuse unor deformații însoțite de frecări interioare în materialul pneului, în stratul deformat al drumului și de frecări între cauciucul roții și suprafața drumului. Deformarea pneului depinde de materialul din care este executat, de construcția lui, de presiunea aerului din interior, de încărcarea roții, de forțele și momentele aplicate la roată și de gradul de netezime a suprafeței de rulare. Deformarea căii de rulare (drumului) depinde de natura, rezistența și grosimea învelișului și fundației lui, precum și de mărimea presiunii roții asupra drumului.

Toate aceste deformații însumează o pierdere de energie a cărei manifestare exterioară este apariția unei forțe care se opune rulării roții (forța de rezistență la rulare). Datorită rezistenței la rulare se produce încălzirea pneului, ceea ce afectează rezistența la uzare a anvelopei și rezistența la oboseală de încovoiere a materialului acesteia.

În figura 2.3 sunt reprezentate forțele și momentele care acționează asupra roții unui autovehicul în timpul rulării; considerând pneul deformabil și calea de rulare tare, greutatea roții  $G_R$  determină distribuția de presiune reprezentată în figura 2.3 a.



**Fig. 2.3 – Forțe și momente la roată:**  
a) pe porțiune plană; b) la urcare/coborâre pe pantă.

#### Calculul rezistenței la rulare

Integrala distribuției de presiune pe aria de contact a pneului determină o forță de reacțiune  $R$  egală cu încărcarea roții  $G_R$ . Datorită distribuției asimetrice a presiunii pe aria de contact a roții cu rostogolire, punctul de aplicație al reacțiunii  $R$  este poziționat în fața axei roții (în sensul de mișcare) cu mărimea excentricității  $e$ . Această deplasare se datorează faptului că deformarea pneului este mai mare în partea din față a suprafeței de contact decât în partea din spate, caracteristică a fenomenului de histeresis a cauciucului (pierderile prin comprimare în partea din față sunt mai mari decât energia recuperată prin întindere în partea din spate a zonei de contact).

Dacă roata nu este accelerată și este acționată de momentul  $T_R$  atunci:

$$F_r = f \cdot G_R \quad (2.6)$$

în care:  $f$  – coeficient de rezistență la rostogolire (rulare) cu valorile standard indicate în tabelul 2.1.

Rezistența la rulare este, în principal, funcție de viteza la drum, încărcarea roții, presiunea pneului și tipul acestuia.

La deplasarea în sus/jos a pantelor la un unghi  $\alpha$  (figura 2.3 b) se poate scrie:

$$R = G_R \cdot \cos \alpha \quad (2.7)$$

Pentru întregul autovehicul de masă  $m_a$ , rezistența roții  $F_R$  care este considerată egală cu rezistența la rostogolire este astfel dată de relația:

$$F_R = f \cdot m_a \cdot g \cdot \cos \alpha \quad (2.8)$$

**Tabelul 2.1** Valorile de referință pentru coeficientul de rezistență la rulare.

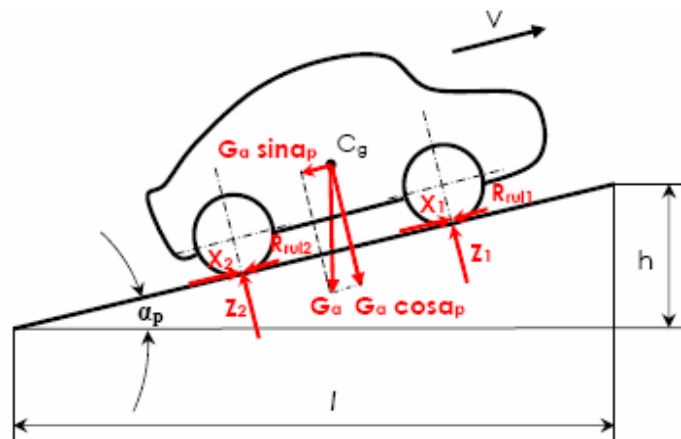
Suprafața drumului	Coeficientul de rezistență la rulare $f$
<i>Suprafață compactă (rigidă)</i>	
șosea netedă, pistă de aterizare /decolare	0,01
șosea netedă din beton	0,011
șosea asfaltată sau din beton, în stare bună	0,014 – 0,018
șosea asfaltată sau din beton, în stare medie	0,018 – 0,02
șosea bună cu pavele din piatră	0,02
șosea cu suprafața rea uzată	0,035
<i>Suprafață neasfaltată</i>	
drum cu piatră cubică	0,02 – 0,022
drum cu piatră de râu	0,025 – 0,03
drum cu pietriș	0,023 – 0,025
drum cu pământ, uscat	0,025 – 0,033
drum cu pământ, ud	0,05 – 0,15
drum cu zăpadă, bătut	0,025 – 0,03
drum cu nisip, uscat	0,10 – 0,30
drum cu nisip, umed	0,08 – 0,10
drum de țară bun	0,045
drum de țară rău	0,16
urme de tractor cu șenile pe pământ	0,07 – 0,12
nisip afânat	0,15 – 0,30

pentru viteze sub 60 km/h –  $f_R$  poate fi considerat constant.

### 3.2. Rezistența la urcarea pantei

Rezistența la urcarea pantei  $F_p$  este determinată de mărimea componentei greutateii totale a autovehiculului, paralelă cu suprafața drumului, îndreptată către baza pantei, aplicată în centrul de greutate  $C_g$  ca și greutatea  $G_a$  (figura 2.4):

$$F_p = G_a \cdot \sin \alpha_p \quad (2.9)$$



**Fig. 2.4** – Rezistența la urcarea pantei.

Convențional la urcare panta este denumită *rampă*, iar la coborâre *pantă* (rezistența la coborârea pantei devine negativă contribuind la delasarea autovehiculului).

Înclinarea căii de rulare se apreciază prin două mărimi:

- unghiul cu orizontala  $\alpha_p$ ,
- panta  $p = \tan \alpha_p = \frac{h}{l}$ , unde  $h$  este diferența de nivel urcată de autovehicul atunci când parcurge pe cale o distanță a cărei proiecție pe orizontală este  $l$ .

Puterea necesară învingerii rezistenței la urcarea pantei este dată de relația:

$$P_p = F_p \cdot v = G_a \cdot v \cdot \sin \alpha_p \quad (2.10)$$

unde  $v$  – viteza de deplasare (rulare) a autovehiculului.

Suma rezistențelor la rulare și urcarea pantei reprezintă *rezistența totală a drumului*  $F_{r+p}$ :

$$\begin{aligned} F_{r+p} &= F_r + F_p = G_a \cdot f \cdot \cos \alpha_p + G_a \cdot \sin \alpha_p = \\ &= G_a \cdot (f \cdot \cos \alpha_p + \sin \alpha_p) = G_a \cdot \psi \end{aligned} \quad (2.11)$$

unde:  $\psi$  – coeficientul rezistenței totale a drumului:

$$\psi = f \cdot \cos \alpha_p + \sin \alpha_p \quad (2.12)$$

### 3.3. Rezistența aerului

Se consideră că viteza aerului față de autovehicul  $\vec{v}_a$  are o direcție oarecare cu axa longitudinală a autovehiculului, iar interacțiunea aerului cu autovehiculul are ca urmare producerea unei forțe și a unui moment care se raportează față de un sistem triortogonal cu originea în planul căii, la mijlocul lungimii autovehiculului, în planul longitudinal de simetrie (figura 2.5).

Forța aerodinamică  $F_a$  și momentul  $M_a$  corespunzător au expresiile generale definite de relațiile de calcul semi-empirice:

$$\begin{aligned} F_a &= \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_x^2 \cdot C_a(\alpha_a, Re) \cdot A, \\ M_a &= \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_x^2 \cdot C_{ma}(\alpha_a, Re) \cdot A \cdot l_a \end{aligned} \quad (2.13)$$

unde:  $\rho_a$  – densitatea aerului,  $v_x$  – viteza relativă a aerului față de autovehicul pe direcție longitudinală,  $C_a(\alpha_a, Re)$  – coeficientul forței aerodinamice totale (se determină empiric pentru fiecare autovehicul și depinde de unghiul  $\alpha_a$  dintre direcția vântului și axa longitudinală a autovehiculului și de numărul lui Reynolds  $Re$ ),  $C_{ma}$  – coeficientul momentului aerodinamic total,  $A$  – aria secțiunii transversale maxime a autovehiculului,  $l_a$  – lățimea de gabarit a autovehiculului.

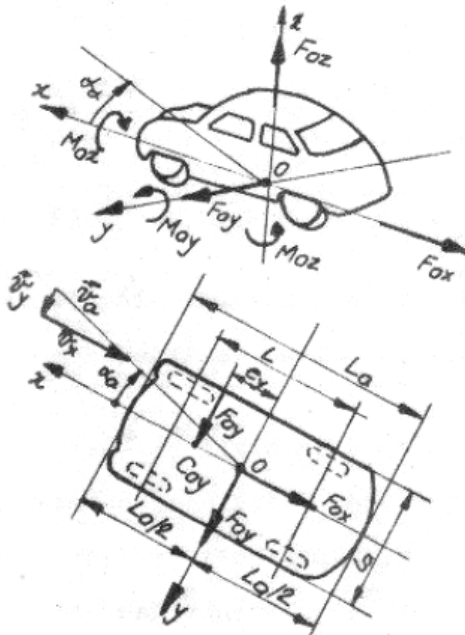


Fig. 2.5 – Definirea componentelor forței și momentului de interacțiune cu aerul.

Componentele forței de rezistență a aerului sunt:

- forța aerodinamică longitudinală:  $F_{ax} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_x^2 \cdot C_x \cdot A \quad (2.14)$

- forța aerodinamică laterală:  $F_{ay} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_x^2 \cdot C_y \cdot A \quad (2.15)$

- forța aerodinamică portantă:  $F_{az} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_x^2 \cdot C_z \cdot A \quad (2.16)$

iar cele ale momentului de rezistență a aerului:

- *moment aerodinamic de ruluu:* 
$$M_{ax} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_x^2 \cdot C_{mx} \cdot A \cdot l_a \quad (2.17)$$

- *moment aerodinamic de tangaj:* 
$$M_{ay} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_x^2 \cdot C_{my} \cdot A \cdot l_a \quad (2.18)$$

- *moment aerodinamic de girație:* 
$$M_{az} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_x^2 \cdot C_{mz} \cdot A \cdot l_a \quad (2.19)$$

în care:  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$  – coeficienții forței aerodinamice pe direcțiile x, y, respectiv z,  $C_{mx}$ ,  $C_{my}$ ,  $C_{mz}$  – coeficienții momentelor aerodinamice pe direcțiile respective.

*Rezistența aerului* reprezintă forța aerodinamică longitudinală  $F_{ax}$ , ca în figura 2.5, care întotdeauna are sensul de acționare opus sensului vitezei de deplasare a autovehiculului și punctul de aplicație în centrul de presiune (metacentrul) frontal.

### 3.4. Rezistența la accelerare

În regim de accelerare, rezistențelor datorate aerului, rulării și pantei li se adaugă *rezistența opusă de inerția autovehiculului*. Aceasta este formată din forța de inerție a maselor în mișcare de translație (întreaga masă a autovehiculului) și inerția pieselor în mișcare de rotație (roți și cele legate de ele):

$$R_d = R_{dt} + R_{dr} \quad (2.20)$$

Rezistența datorată inerției masei totale a autovehiculului în mișcare de translație este:

$$R_{dt} = m_a \cdot a = \frac{G_a}{g} \cdot \frac{dv}{dt} \quad (2.21)$$

unde:  $m_a$  – masa totală a autovehiculului,  $a$  – accelerația centrului de greutate al autovehiculului în mișcare de translație,  $G_a$  – greutatea autovehiculului.

Pieșele în mișcare de rotație sunt: roțile motoare, pieșele în mișcare din motor, cele din transmisie și roțile nemotoare (figura 2.6).

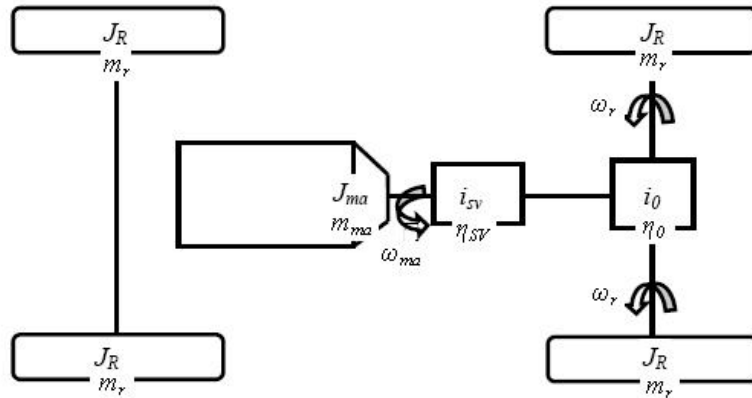


Fig. 2.6 – Componentele aflate în mișcare de rotație în autovehicul.

**Pentru calcule uzuale** se ține seama numai de inerția pieselor motorului, a ambreiajului și de roțile motoare, celelalte pieșe ale grupului moto–propulsor având momente de inerție mult mai mici, sunt neglijate.

*Rezistența datorată inerției la rotire a roților motoare și a pieselor legate cinematic de acestea este dată de relația:*

$$R_{drm} = \frac{1}{r_r^2} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \left( J_{ma} \cdot i_t^2 \cdot \eta_t + \sum_{i=1}^{n_{rm}} J_{ri} \right) \quad (2.22)$$

unde:  $J_{ma}$  – momentul masic de inerție al pieselor în mișcare din motor redus la axa arborelui cotit și al pieselor în rotație ale ambreiajului,  $i_t$  – raportul de transmitere al întregii transmisii,  $\eta_t$  – randamentul întregii transmisii,  $J_{ri}$  – momentul masic de inerție al unei roți motoare,  $n_{rm}$  – numărul roților motoare.

În cazul unei transmisii formată din ambreiaj, schimbător de viteze, transmisie centrală, diferențial și arbori planetari raportul ei de transmitere este:

$$i_t = i_{sv} \cdot i_0 \quad (2.23)$$

cu:  $i_{sv}$  – raportul de transmitere al schimbătorului de viteze (depinde de treapta cuplată),  $i_0$  – raportul de transmitere al transmisiei centrale.

Astfel:

$$R_{drm} = \frac{1}{r_r^2} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \left( J_{ma} \cdot i_{sv}^2 \cdot i_0^2 \cdot \eta_t + \sum_{i=1}^{n_{rm}} J_{ri} \right) \quad (2.24)$$

iar rezistența la accelerare a autovehiculului dată de relația (2.20) devine:

$$R_d = \frac{G_a}{g} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{1}{r_r^2} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \left( J_{ma} \cdot i_{sv}^2 \cdot i_0^2 \cdot \eta_t + \sum_{i=1}^{n_r} J_{ri} \right) \quad (2.25)$$

#### 4. Calculul reacțiunilor normale la punțile autovehiculului

La deplasarea unui autovehicul, asupra punților acestuia, apar reacțiuni normale la contactul roților cu calea de rulare care se manifestă în două plane (longitudinal și transversal) față de direcția vitezei acestuia.

Mărimea acestor reacțiuni este influențată de condițiile de deplasare și de parametrii constructivi ai autovehiculului.

Determinarea reacțiunilor normale ale căii de rulare se efectuează pentru un autovehicul cu două sau trei punți care urcă o pantă cu înclinare longitudinală  $\alpha$  în regim tranzitoriu, cu mișcare uniform accelerată.

##### 4.1. Autovehicule cu două punți

Figura 2.7 reprezintă un autovehicul cu două punți, care se deplasează rectiliniu cu viteză variabilă, pe direcția de cea mai mare pantă a unui drum perfect plan având înclinarea  $\alpha_p$  față de orizontală.

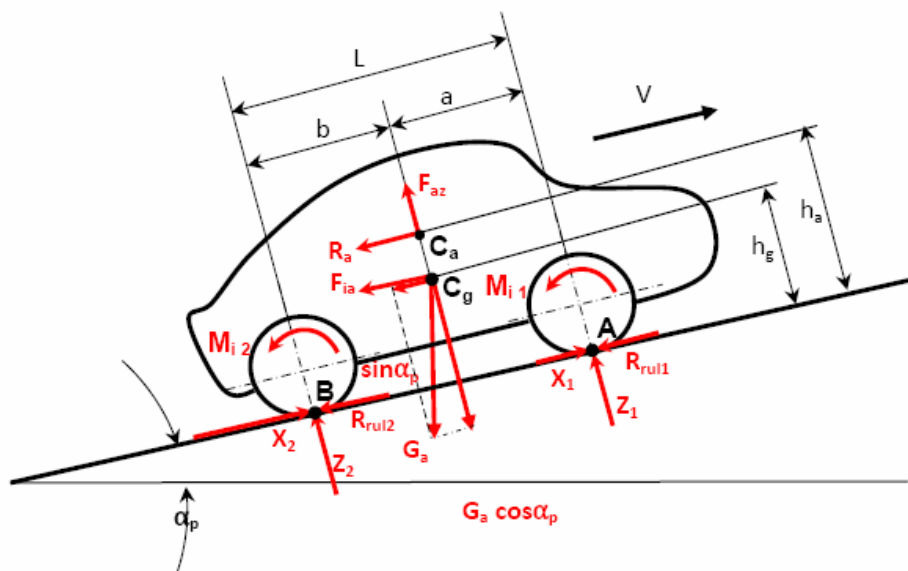


Fig. 2.7 – Reacțiunile normale în plan longitudinal pentru autovehicul cu două punți.

Forțele și momentele care acționează asupra autovehiculului se grupează în trei categorii:

- *direct aplicate*: greutatea autovehiculului  $G_a$ , rezistența aerului  $R_a$ , forța aerodinamică de portanță  $F_{az}$ ;
- *de legătură cu calea de rulare*: reacțiunile normale ( $Z_1, Z_2$ ), reacțiunile tangențiale longitudinale ( $X_1, X_2$ ) și rezistențele la rulare ( $R_{rul1}, R_{rul2}$ );
- *de inerție*: forța de inerție a autovehiculului în mișcare de translație  $F_{ia}$  și momentele generate de inerția roților și altor piese în mișcare de rotație date de relațiile:

$$F_{ia} = \frac{G_a}{g} \cdot \frac{dv}{dt} \quad \text{respectiv} \quad M_{i1} + M_{i2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_r} J_{ri}}{r_r} \cdot \frac{dv}{dt} \quad (2.26)$$

Determinarea reacțiunii  $Z_1$  se realizează din echilibrul de momente față de punctul de contact B, impunând condiția  $\left(\sum M\right)_B = 0$  se poate scrie:

$$Z_1 \cdot L - G_a \cdot \cos \alpha_p \cdot b + G_a \cdot \sin \alpha_p \cdot h_g + F_{ia} \cdot h_g + R_a \cdot h_a + F_{az} \cdot b + M_{i1} + M_{i2} = 0 \quad (2.27)$$

Deoarece componentele  $F_{az}$  și  $\sum_{i=1}^{n_r} J_{ri} / r_r$  sunt foarte mici, pentru calculul celor două reacțiuni se utilizează relațiile:

$$Z_1 = \frac{1}{L} \cdot \left[ G_a \cdot (b \cdot \cos \alpha_p - h_g \cdot \sin \alpha_p) - \frac{G_a}{g} \cdot h_g \cdot \frac{dv}{dt} - h_a \cdot 0,0472 \cdot C_x \cdot A \cdot v_x^2 \right] \quad (2.28)$$

$$Z_2 = \frac{1}{L} \cdot \left[ G_a \cdot (a \cdot \cos \alpha_p + h_g \cdot \sin \alpha_p) + \frac{G_a}{g} \cdot h_g \cdot \frac{dv}{dt} + h_a \cdot 0,0472 \cdot C_x \cdot A \cdot v_x^2 \right] \quad (2.29)$$

Se definesc coeficienții de încărcare dinamică:

$$m_1 = \frac{Z_1}{G_1} = \frac{Z_1}{\frac{b}{L} \cdot G_a}, \quad \text{respectiv} \quad m_2 = \frac{Z_2}{G_2} = \frac{Z_2}{\frac{a}{L} \cdot G_a} \quad (2.30)$$

Reacțiunile tangențiale ale solului  $X_1$  și  $X_2$  sunt limitate de aderența la calea de rulare, astfel încât reacțiunile normale la punți sunt și ele limitate.

Din echilibrul forțelor pe direcția deplasării autovehiculului:

$$X_1 + X_2 = G_a \cdot \sin \alpha_p + \frac{G_a}{g} \cdot \frac{dv}{dt} + R_a + R_{rul1} + R_{rul2} \quad (2.31)$$

neglijând forțele de rulare (mult mai mici decât celelalte forțe) se obține:

$$X_1 + X_2 = G_a \cdot \sin \alpha_p + \frac{G_a}{g} \cdot \frac{dv}{dt} + R_a \quad (2.32)$$

de unde rezultă:

$$G_a \cdot \sin \alpha_p + \frac{G_a}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = X_1 + X_2 - R_a \quad (2.33)$$

în care:  $R_a = 0,0472 \cdot C_x \cdot A \cdot v_x^2$ .

Aranjând relațiile (2.28) și (2.29) sub altă formă, se deduc cele două reacțiuni normale:

$$Z_1 = \frac{b}{L} \cdot G_a \cdot \cos \alpha_p - \frac{h_g}{L} \cdot (X_1 + X_2) - \frac{h_a - h_g}{L} \cdot R_a \quad (2.34)$$

$$Z_2 = \frac{a}{L} \cdot G_a \cdot \cos \alpha_p + \frac{h_g}{L} \cdot (X_1 + X_2) + \frac{h_a - h_g}{L} \cdot R_a \quad (2.35)$$

Dacă se notează:  $X_1 = \xi_1 \cdot Z_1$  și  $X_2 = \xi_2 \cdot Z_2$  atunci  $\xi_1$  și  $\xi_2$  sunt forțele tangențiale specifice la roțile punții din față, respectiv spate.

Înlocuind  $X_1$  și  $X_2$  în relațiile (2.34) și (2.35) se obține un sistem de două ecuații cu necunoscutele  $Z_1$  și  $Z_2$  de forma:



$$\begin{cases} \left(1 + \frac{h_g}{L} \cdot \xi_1\right) \cdot Z_1 + \frac{h_g}{L} \cdot \xi_2 \cdot Z_2 = \frac{b}{L} \cdot G_a \cdot \cos \alpha_p - \frac{h_a - h_g}{L} \cdot R_a \\ -\frac{h_g}{L} \cdot \xi_1 \cdot Z_1 + \left(1 - \frac{h_g}{L} \cdot \xi_2\right) \cdot Z_2 = \frac{a}{L} \cdot G_a \cdot \cos \alpha_p + \frac{h_a - h_g}{L} \cdot R_a \end{cases} \quad (2.36)$$

care are soluțiile:

$$Z_1 = \frac{1}{L} \cdot \frac{b \cdot G_a \cdot \cos \alpha_p - h_g \cdot \xi_2 \cdot G_a \cdot \cos \alpha_p - (h_a - h_g) \cdot R_a}{1 + \frac{h_g}{L} \cdot (\xi_1 - \xi_2)} \quad (2.37)$$

$$Z_2 = \frac{1}{L} \cdot \frac{a \cdot G_a \cdot \cos \alpha_p + h_g \cdot \xi_2 \cdot G_a \cdot \cos \alpha_p + (h_a - h_g) \cdot R_a}{1 + \frac{h_g}{L} \cdot (\xi_1 - \xi_2)} \quad (2.38)$$

Forțele tangențiale specifice sunt limitate de valoarea coeficientului de aderență astfel:

$$-\varphi_x \leq \xi_1 \leq +\varphi_x \quad \text{și} \quad -\varphi_x \leq \xi_2 \leq +\varphi_x \quad (2.39)$$

unde:  $\varphi_x$  – coeficient de aderență longitudinală care se adoptă în funcție de tipul și starea drumului (tabelul 2.2).

Stabilirea reacțiunilor normale la autovehiculele cu două punți se realizează prin particularizarea relațiilor anterioare funcție de poziția punții motoare, tipul frânării și tipul autovehiculului.

**Tabelul 2.2** Valorile coeficientului de aderență.

Tipul drumului	Coeficient de aderență longitudinală $\varphi_x$	
	Starea suprafeței drumului	
	Uscată	umedă
Asfalt sau beton nou	0,7 ... 0,8	0,5 ... 0,6
Asfalt sau beton uzat, lustruit	0,5 ... 0,6	0,35 ... 0,45
Drum cu piatră cubică	0,45 ... 0,7	0,3 ... 0,4
Drum cu pietriș	0,45 ... 0,5	0,4 ... 0,55
Drum cu piatră de râu	0,45 ... 0,65	0,3 ... 0,4
Drum cu pământ	0,5 ... 0,6	0,3 ... 0,4
Drum cu nisip	0,5 ... 0,6	0,6 ... 0,7
Drum cu zăpadă	0,2 ... 0,3	
Drum cu polei	0,1 ... 0,15	

#### a) Autovehicul cu puntea motoare în spate

În acest caz, *roțile punții din față sunt conduse*, iar reacțiunea tangențială  $X_l$  este o forță îndreptată împotriva sensului mișcării în care se neglijează componenta tangențială aferentă inerției ( $X_{il} \approx 0$ ). Forța tangențială specifică la această punte este  $\xi_1 = -f$ .

La puntea din spate *reacțiunea tangențială*  $X_2$  este egală cu *forța de tracțiune* fiind orientată în sensul deplasării, iar forța tangențială specifică este pozitivă, deoarece este o forță de propulsie, valoarea maximă fiind limitată de valoarea coeficientului de aderență longitudinal:

$$\varphi_x = \frac{X_{r2\max}}{Z_{r2}} = \xi_2 \quad (2.40)$$

Se definește *forța specifică de tracțiune* prin relația:

$$\gamma_t = \frac{F_t}{G_a} \quad (2.41)$$

în care:  $F_t$  – forța de tracțiune totală de la toate roțile motoare.

*Forța specifică de frânare* se definește ca raport:

$$\gamma_f = \frac{F_f}{G_a} \quad (2.42)$$

unde:  $F_f$  – forța de frânare totală de la toate roțile frânate.

**b) Autovehicul cu puntea motoare în față**

În acest caz roțile punții din spate sunt conduse, astfel încât:

$$\xi_1 = \varphi_x \quad \text{și} \quad \xi_2 = -f \quad (2.43)$$

**c) Autovehicul cu ambele punți motoare (4 × 4)**

În acest caz, deoarece toate roțile sunt motoare:

$$\xi_1 = \varphi_x \quad \text{și} \quad \xi_2 = \varphi_x \quad (2.44)$$

**d) Autovehicul frânat pe ambele punți**

Forțele și momentele care acționează asupra autovehiculului sunt reprezentate în figura 2. În acest caz rezistența la accelerare devine  $F_a$  devine forță activă având același sens ca mișcarea autovehiculului, iar reacțiunile tangențiale la cele două punți sunt forțe de frânare limitate de aderență și orientate în sens invers deplasării.

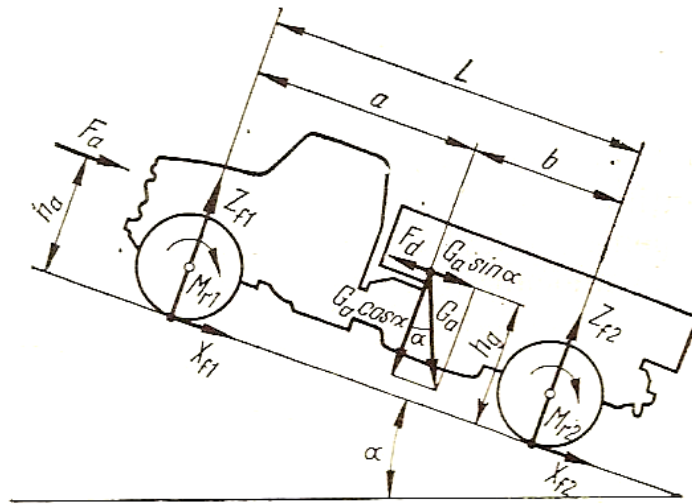


Fig. 2.8 – Forțele și momentele la autovehicul frânat pe ambele punți.

Astfel:

$$\xi_1 = \varphi_x \quad \text{și} \quad \xi_2 = \varphi_x \quad (2.45)$$

condiții din care se determină reacțiunile normale

**e) Autovehicul cu remorcă sau semiremorcă**

Se consideră cazul când *puntea din față este motoare*, iar pentru determinarea poziției centrului de greutate pe direcție longitudinală se consideră autovehiculul pe drum orizontal (figura 2.9).

Rezultă:

$$a = \frac{Z_{a2}}{G_a} \cdot L; \quad b = \frac{Z_{a1}}{G_a} \cdot L \quad (2.46)$$

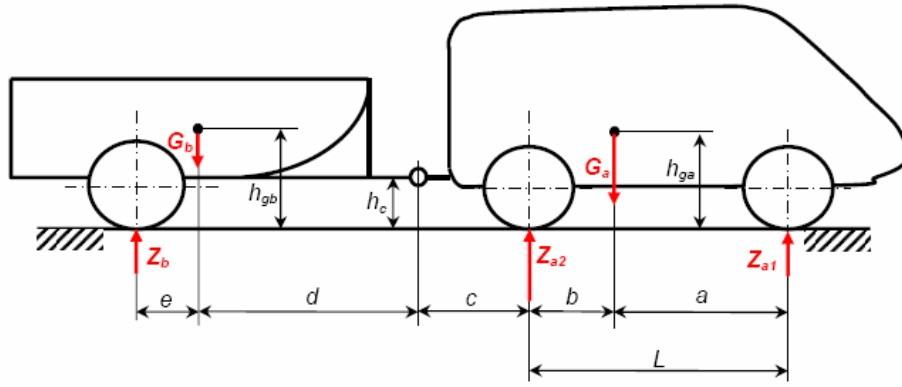


Fig. 2.9 – Forțele și momentele la autovehicul cu remorcă.

La deplasarea trenului rutier pe drum înclinat se separă cele două vehicule (figura 2.10), reprezentându-se forțele de legătură  $F_{cx}$  și  $F_{cz}$ , se determină:

- pentru remorcă: ecuația de echilibru al momentelor față de punctul C:

$$\left(\sum M_b\right)_C = -G_b \cdot \cos \alpha \cdot e + G_b \cdot \sin \alpha \cdot h_g + F_{cz} \cdot (d + e) - F_{cx} \cdot h_c = 0 \quad (2.47)$$

și ecuația de echilibru al forțelor pe direcție paralelă cu solul:

$$\left(\sum F_b\right)_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{cx} = G_b \cdot \sin \alpha \quad (2.48)$$

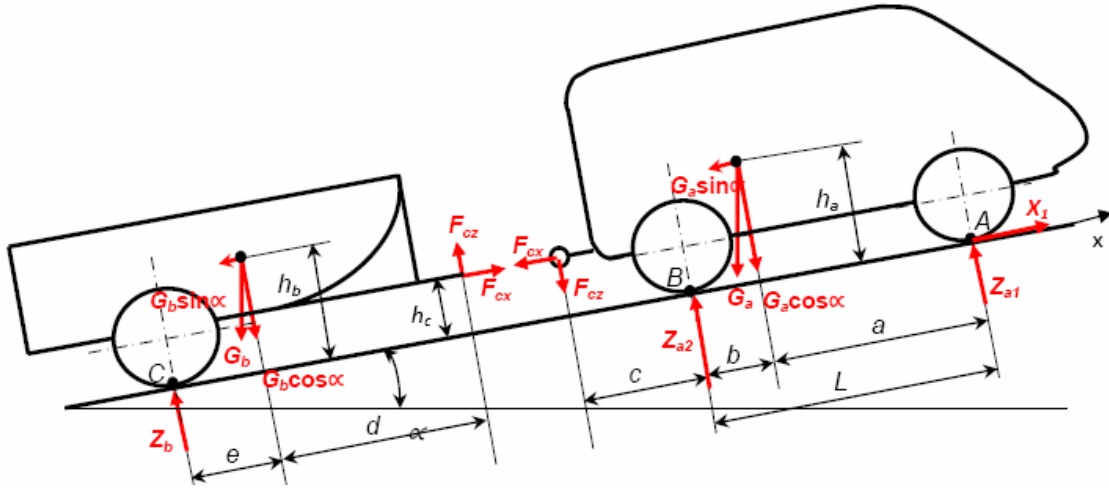


Fig. 2.10 – Autovehicul cu remorcă care urcă o pantă.

- pentru vehiculul tractor: ecuația de echilibru al momentelor față de punctul B:

$$\left(\sum M_a\right)_B = -G_a \cdot \cos \alpha \cdot b + G_a \cdot \sin \alpha \cdot h_a + Z_{a1} \cdot L + F_{cz} \cdot h_c + F_{cx} \cdot c = 0 \quad (2.49)$$

Dacă unghiul pantei este mic (sub  $10^\circ$ ) se fac aproximările:  $\sin \alpha \cong \tan \alpha$  și  $\cos \alpha \cong 1$  se stabilește:

$$F_{cz} = \frac{1}{d + e} \cdot (e + h_c \cdot \tan \alpha - h_b \cdot \tan \alpha) \cdot G_b \quad (2.50)$$

- pentru întregul tren rutier: ecuația de echilibru al forțelor pe direcție paralelă cu solul:

$$\left(\sum F\right)_x = 0 \quad \Rightarrow \quad G_a \cdot \sin \alpha \cdot b + G_b \cdot \sin \alpha - X_1 = 0 \quad (2.51)$$

Ținând seama că forța maximă de tracțiune este limitată de aderență:

$$X_{l\max} = \varphi \cdot Z_{a1} \quad (2.52)$$

se determină reacțiunea normală  $Z_{a1}$ .

Pentru cazul când **puntea din spate este motoare**, se scrie ecuația de echilibru al momentelor pentru vehiculul tractor față de punctul A:

$$\left(\sum M_a\right)_A = G_a \cdot \cos \alpha \cdot a + G_a \cdot \sin \alpha \cdot h_a + F_{cz} \cdot (L + c) + F_{cx} \cdot h_c - Z_{a2} \cdot L = 0 \quad (2.53)$$

(în care  $Z_{a2}$  se determină cu relația similară cu cea pentru  $Z_{a1}$  din cazul precedent) din care se stabilește relația pentru  $Z_{a1}$ .

Pentru remorcă situația este similară cu cea anterioară (relația de calcul pentru forța  $F_{cz}$  rămâne aceeași).

#### 4.2. Autovehicule cu trei punți

Categoriile de forțe și momente precum și ipotezele de lucru sunt aceleași ca la autovehiculele cu două punți.

Din ecuația de echilibru al momentelor față de punctul C (mijlocul distanței dintre axele punților în tandem):  $\left(\sum M\right)_C = 0$  rezultă:

$$Z_1 \cdot L + (Z_2 - Z_3) \cdot \frac{c}{2} - G_a \cdot \cos \alpha_p \cdot b + G_a \cdot \sin \alpha_p \cdot h_g + F_{ia} \cdot h_g + R_a \cdot h_a + F_{az} \cdot b = 0 \quad (2.54)$$

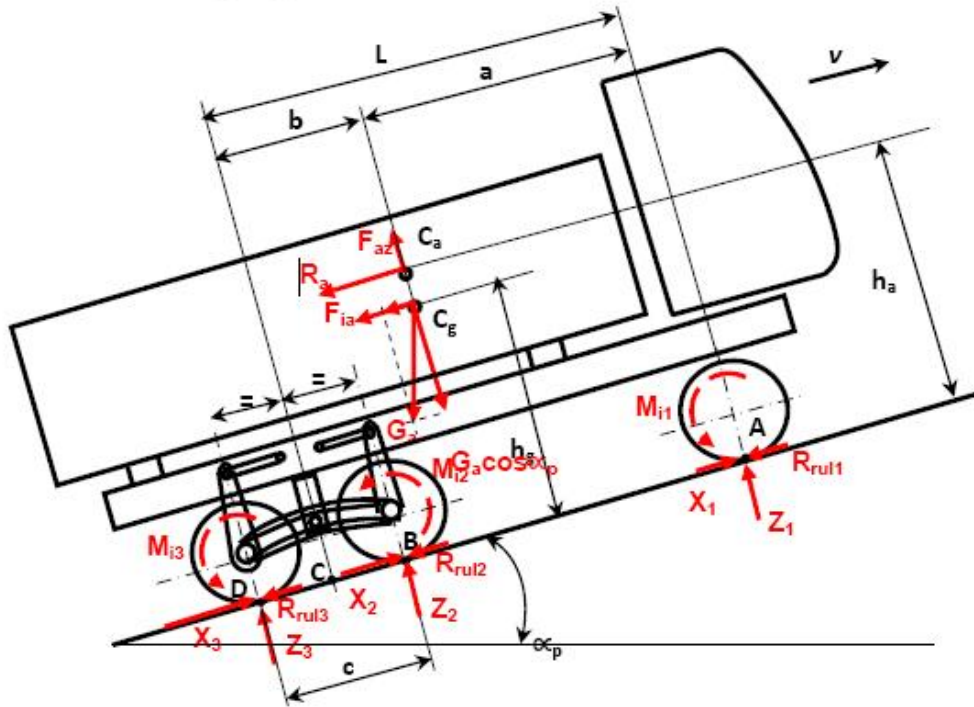


Fig. 2.11 – Forțele și momentele la un autovehicul cu trei punți.

Astfel de soluții de punți motoare spate se întâlnesc la autovehicule grele, la care viteza de deplasare este în general relativ redusă astfel încât  $R_a \cdot h_a$  și  $F_{az} \cdot b$  sunt mult mai mici decât ceilalți termeni ai ecuației, deci se neglijează.

Din echilibrul forțelor în direcție normală la sol  $\left(\sum F\right)_z = 0$  se scrie ecuația:

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 - G_a \cdot \cos \alpha_p + F_{az} = 0 \quad (2.55)$$

cu neglijarea termenului  $F_{az}$ .

Pentru determinarea celor trei necunoscute  $Z_1$ ,  $Z_2$  și  $Z_3$  este necesară încă o ecuație ce rezultă din analiza echilibrului separat al punților care formează tandemul față de punctul O:

$$(Z_2 - Z_3) \cdot \frac{c}{2} + (X_2 + X_3) \cdot h_g + (R_{rul2} + R_{rul3}) \cdot h_g - (X'_2 + X'_3) \cdot (h_b - h_g) + M_{i2} + M_{i3} = 0 \quad (2.56)$$

în care se neglijează rezistențele la rulare și momentele datorate inerției pieselor în mișcare de rotație.

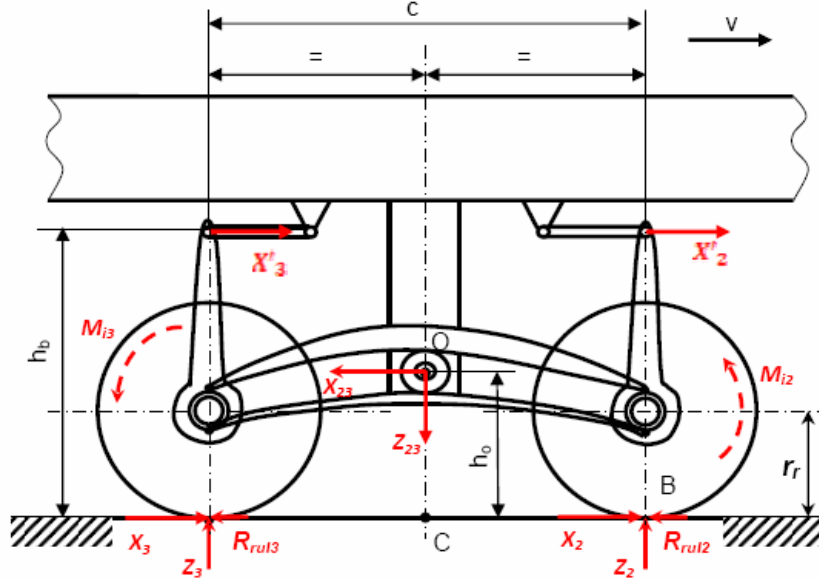


Fig. 2.12 – Forțele și momentele la punțile în tandem.

Echilibrul forțelor pe direcție longitudinală:

$$X_1 + X_2 + X_3 - G_a \cdot \sin \alpha_p - \frac{G_a}{g} \cdot \frac{dv}{dt} - R_a - R_{rul1} - R_{rul2} - R_{rul3} = 0 \quad (2.57)$$

în care se neglijează rezistențele la rulare care sunt mult mai mici decât ceilalți termeni.

Pentru fiecare din cele două punți, echilibrul forțelor paralele cu solul este:

$$X_2 \cdot r_r = X'_2 \cdot (h_b - r_r) \quad (2.58)$$

$$X_3 \cdot r_r = X'_3 \cdot (h_b - r_r) \quad (2.59)$$

Înlocuind  $(X_2 + X_3)$  în relația (2.) și ținând seama de neglijarile precizate se obține:

$$(Z_2 - Z_3) \cdot \frac{c}{2} = -(X_1 + X_2) \cdot \left( h_g - r_r \cdot \frac{h_b - h_g}{h_b - h_r} \right) = 0 \quad (2.60)$$

în care se notează:  $h'_g = \left( h_g - r_r \cdot \frac{h_b - h_g}{h_b - h_r} \right)$

Având în vedere forțele tangențiale specifice, rezultă:

$$X_1 = \xi_1 \cdot Z_1, \quad X_2 = \xi_2 \cdot Z_2 \quad \text{și} \quad X_3 = \xi_3 \cdot Z_3 \quad (2.61)$$

În regim de tracțiune:

$$\xi_1 = -f \quad \text{și} \quad \xi_2 = \xi_3 = \varphi_x \quad (2.62)$$

funcție de care se determină cele trei reacțiuni normale  $Z_{1\varphi}$ ,  $Z_{2\varphi}$  respectiv  $Z_{3\varphi}$  la limita de aderență a roților cu solul.

## 5. Rezultate analitice

Se determină *reacțiunile normale ale căii de rulare asupra roților* pentru cazurile particulare:

- 1) autovehicul cu două punți:
  - a) cu puntea motoare în spate,
  - b) cu puntea motoare în față,
  - c) cu ambele punți motoare,
  - d) frânat pe ambele punți
  - e) care tractează o remorcă;
- 2) autovehicul cu trei punți.

Se stabilesc *relațiile de calcul pentru reacțiunile normale în plan transversal*.